

Gorączka Zachodniego Nilu: dynamika infekcji

Joanna Renclawowicz

& Mark Lewis

& Pauline van den Driessche

BIOFIZMAT2

Wirus Zachodniego Nilu w Ameryce Północnej

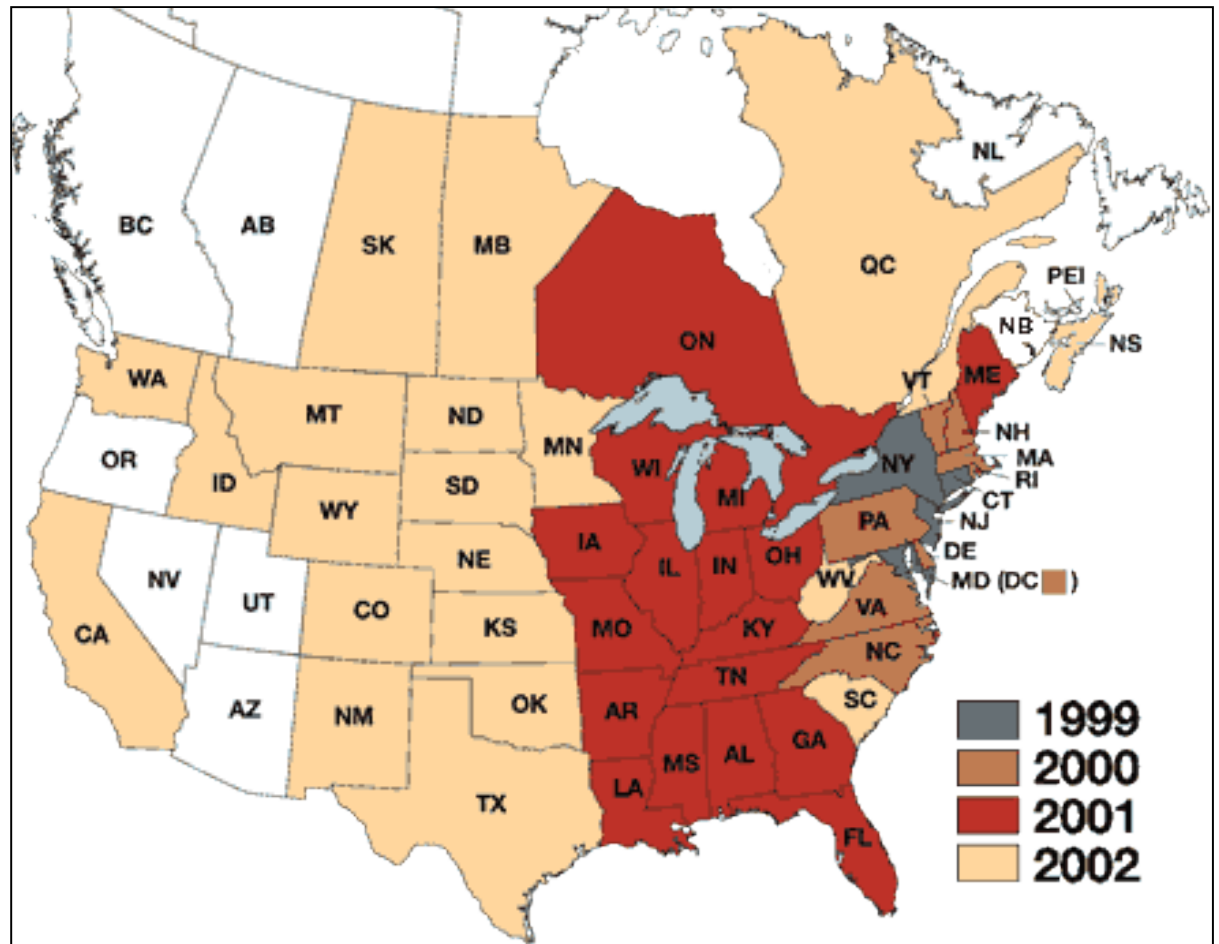
zachorowalność
i śmiertelność

Ptaki (0-100%)

Konie (~40%)

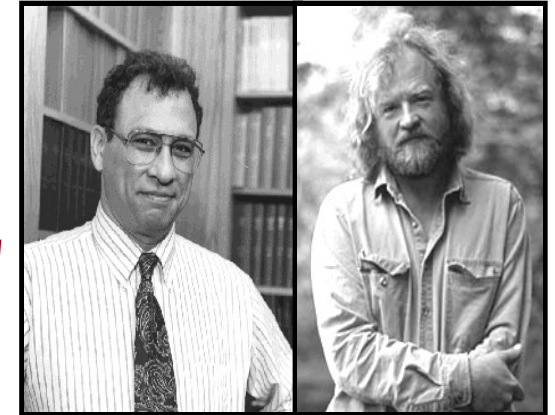
Ludzie (<0.1%)

Komary - zero



Wirus Zachodniego Nilu

Gospodarze wtórni



Ludzie



Konie

Ptak (rezerwuar)



<http://www.47custer.com/>

Komar (wektor)

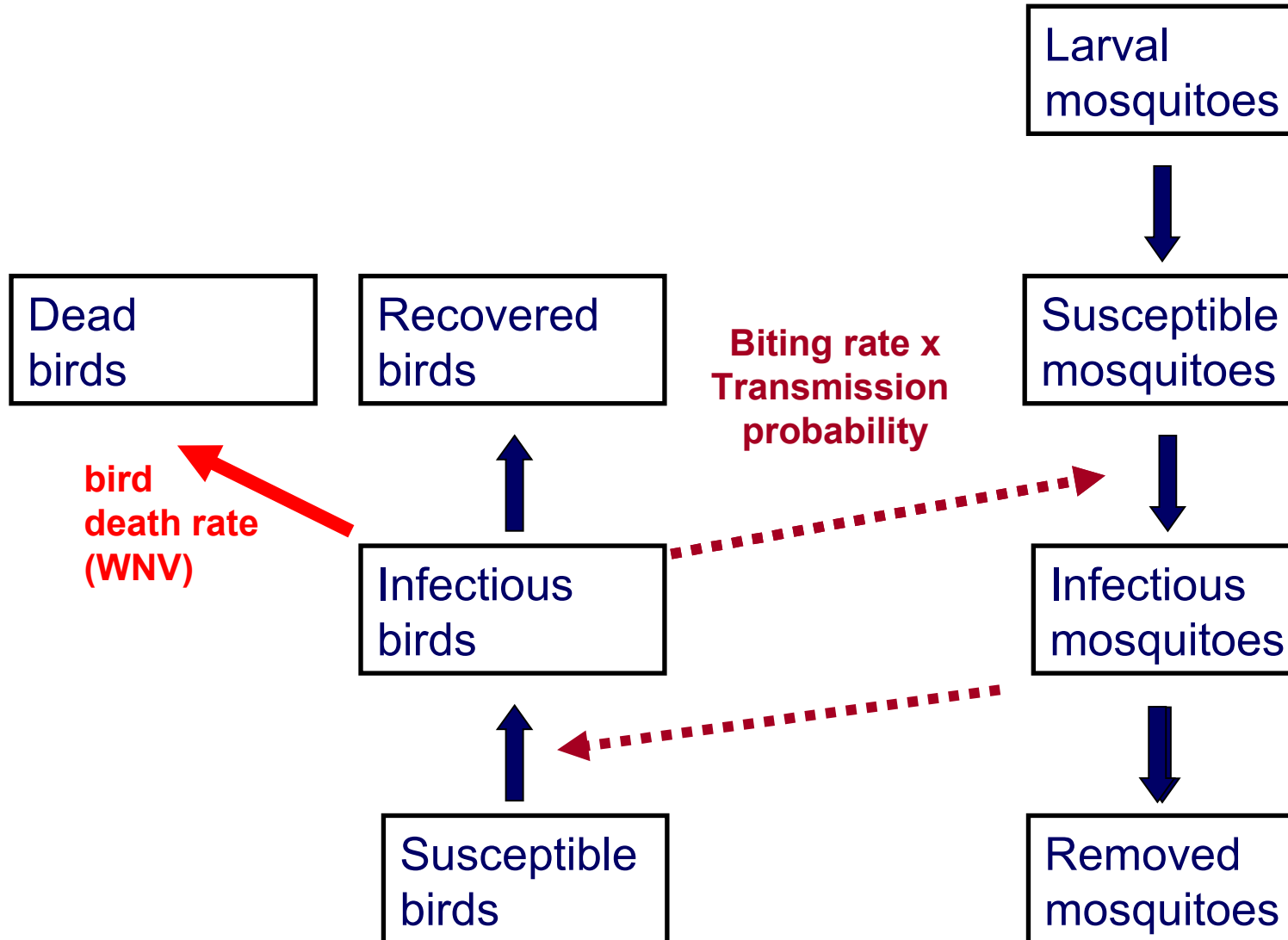


cykl życiowy wirusa



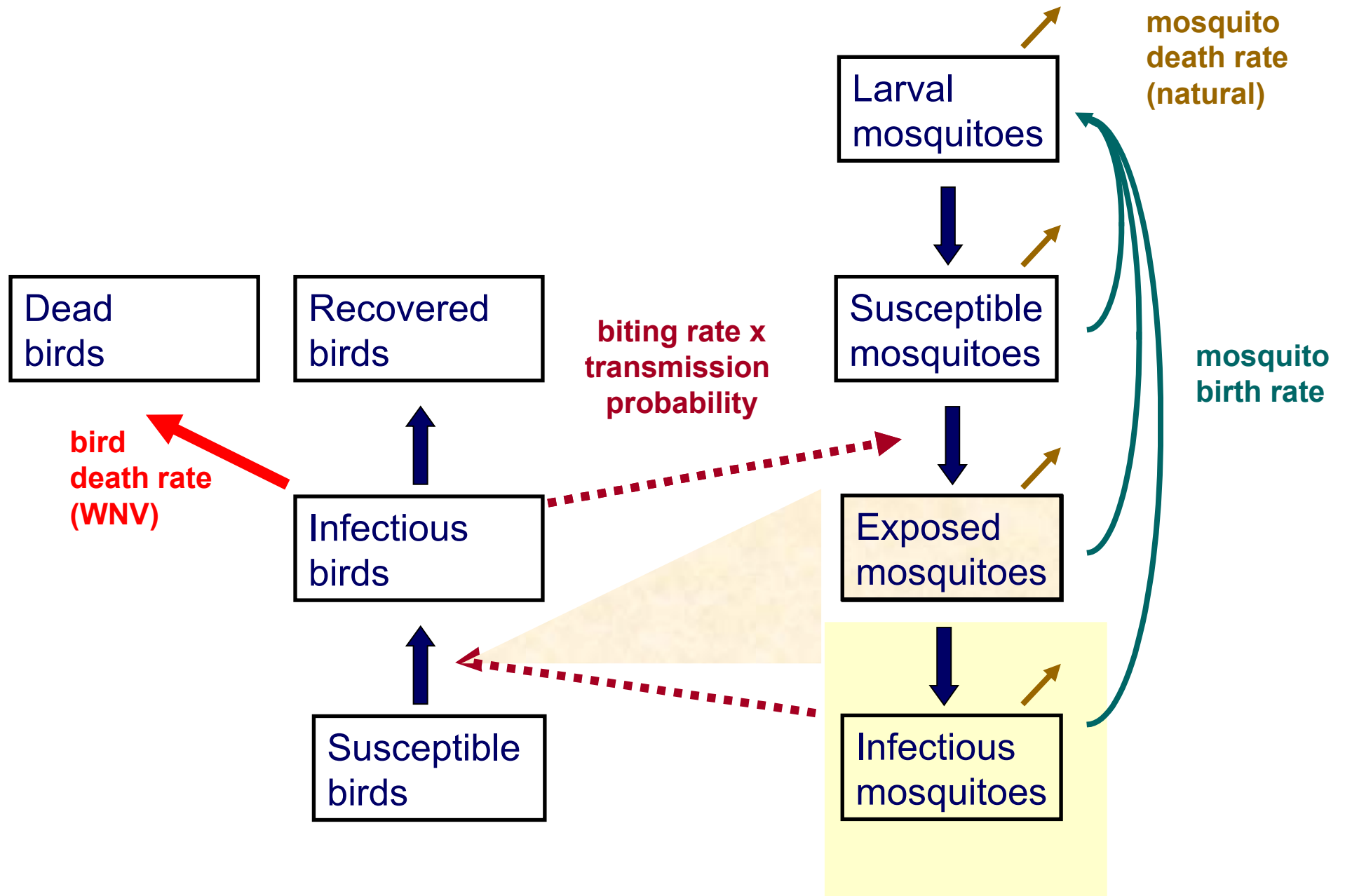


West Nile Virus Model



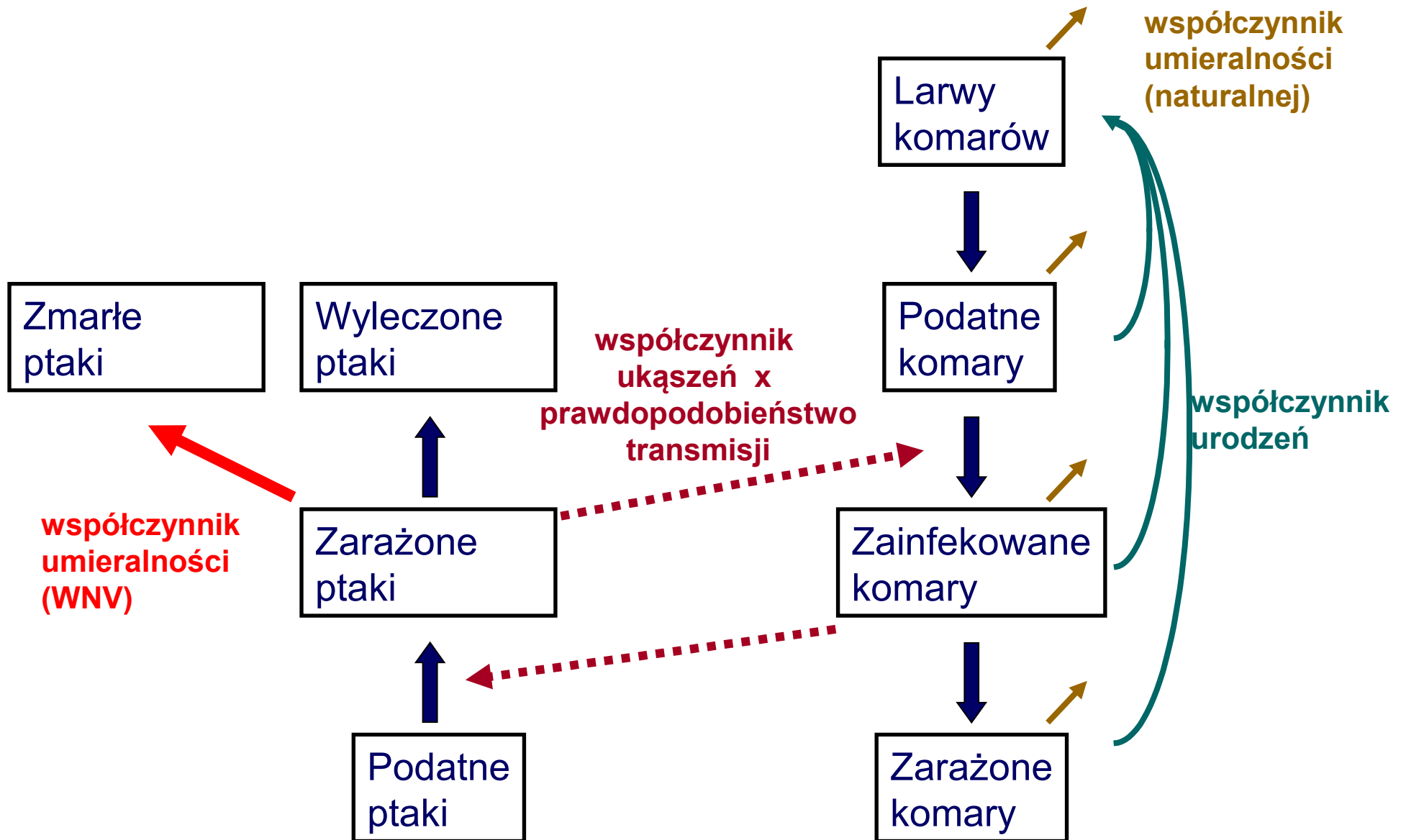


West Nile Virus Model





Wirus Zachodniego Nilu - Model



Vectors: mosquitoes

- L_V - larval
(larwy)
- S_V - susceptible
(podatne)
- E_V - exposed
(zainfekowane)
- I_V - infectious
(zarażone)

Compartments (klasy)

Vectors: mosquitoes

- L_V - larval (larwy)
- S_V - susceptible (podatne)
- E_V - exposed (zainfekowane)
- I_V - infectious (zarażone)

Reservoirs: birds

- S_R - susceptible (podatne)
- I_R - infectious (zarażone)
- R_R - recovered (wyleczone)

- b_V – współczynnik urodzeń komarów
- d_L, d_V – współczynnik śmiertelności larw/ komarów
- m_V – współczynnik dojrzałości komarów
- α_V, α_R – prawdopodobieństwo transmisji wirusa przy ukąszeniu dla komarów/ ptaków
- β_R – współczynnik ukąszeń ptaków przez komary
- κ_V – współczynnik inkubacji wirusa u komarów
- γ_R – współczynnik zdrowienia ptaków
- η_R – współczynnik utraty odporności ptaków
- ε, D – współczynnik dyfuzji komarów/ ptaków

Model zależny przestrzennie (P)

Vectors (komary)

$$\frac{\partial L_V}{\partial t} = b_V(S_V + E_V + I_V) - m_V L_V - d_L L_V$$

$$\frac{\partial S_V}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 S_V}{\partial x^2} - \alpha_V \beta_R \frac{I_R}{N_R} S_V + m_V L_V - d_V S_V$$

$$\frac{\partial E_V}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 E_V}{\partial x^2} + \alpha_V \beta_R \frac{I_R}{N_R} S_V - (\kappa_V + d_V) E_V$$

$$\frac{\partial I_V}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 I_V}{\partial x^2} + \kappa_V E_V - d_V I_V$$

Model zależny przestrzennie (P)

Reservoirs (ptaki)

$$\frac{\partial S_R}{\partial t} = D \frac{\partial^2 S_R}{\partial x^2} - \alpha_R \beta_R \frac{S_R}{N_R} I_V + \eta_R R_R$$

$$\frac{\partial I_R}{\partial t} = D \frac{\partial^2 I_R}{\partial x^2} + \alpha_R \beta_R \frac{S_R}{N_R} I_V - \gamma_R I_R$$

$$\frac{\partial R_R}{\partial t} = D \frac{\partial^2 R_R}{\partial x^2} + \gamma_R I_R - \eta_R R_R$$

- Zainfekowane komary od razu stają się zdolne do zakażenia:

$$\kappa_V \rightarrow \infty \Rightarrow E_V \rightarrow 0$$

- Zainfekowane komary od razu stają się zdolne do zakażenia:

$$\kappa_V \rightarrow \infty \Rightarrow E_V \rightarrow 0$$

- Ptaki po wyzdrowieniu stają się od razu podatne na zarażenie: $\eta_R \rightarrow \infty \Rightarrow R_R \rightarrow 0$

- Zainfekowane komary od razu stają się zdolne do zakażenia:

$$\kappa_V \rightarrow \infty \Rightarrow E_V \rightarrow 0$$

- Ptaki po wyzdrowieniu stają się od razu podatne na zarażenie: $\eta_R \rightarrow \infty \Rightarrow R_R \rightarrow 0$

Całkowita liczba ptaków:

$$N_R(x, t) = S_R(x, t) + I_R(x, t) + R_R(x, t),$$

- Zainfekowane komary od razu stają się zdolne do zakażenia:

$$\kappa_V \rightarrow \infty \Rightarrow E_V \rightarrow 0$$

- Ptaki po wyzdrowieniu stają się od razu podatne na zarażenie: $\eta_R \rightarrow \infty \Rightarrow R_R \rightarrow 0$

Całkowita liczba ptaków:

$$N_R(x, t) = S_R(x, t) + I_R(x, t) + R_R(x, t),$$

$$\frac{\partial N_R}{\partial t} = D \frac{\partial^2 N_R}{\partial x^2}$$

- Zainfekowane komary od razu stają się zdolne do zakażenia:

$$\kappa_V \rightarrow \infty \Rightarrow E_V \rightarrow 0$$

- Ptaki po wyzdrowieniu stają się od razu podatne na zarażenie: $\eta_R \rightarrow \infty \Rightarrow R_R \rightarrow 0$

Całkowita liczba ptaków:

$$N_R(x, t) = S_R(x, t) + I_R(x, t) + R_R(x, t),$$

$$\frac{\partial N_R}{\partial t} = D \frac{\partial^2 N_R}{\partial x^2}$$

- $N_R(x, 0) = N_R = \text{const.} \Rightarrow N_R(x, t) = N_R$

Całkowita liczba dorosłych komarów:

$$A_V(x, t) = S_V(x, t) + E_V(x, t) + I_V(x, t),$$

Całkowita liczba dorosłych komarów:

$$A_V(x, t) = S_V(x, t) + E_V(x, t) + I_V(x, t),$$

$$\frac{\partial A_V}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 A_V}{\partial x^2} - d_V A_V + m_V L_V$$

$$\frac{\partial L_V}{\partial t} = b_V A_V - (m_V + d_L) L_V$$

Całkowita liczba dorosłych komarów:

$$A_V(x, t) = S_V(x, t) + E_V(x, t) + I_V(x, t),$$

$$\frac{\partial A_V}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 A_V}{\partial x^2} - d_V A_V + m_V L_V$$

$$\frac{\partial L_V}{\partial t} = b_V A_V - (m_V + d_L) L_V$$

- $A_V(x, 0) = A_V = \text{const}$, $L_V(x, 0) = L_V = \text{const}$. \Rightarrow
 $A_V(x, t) = A_V(t)$

Całkowita liczba dorosłych komarów:

$$A_V(x, t) = S_V(x, t) + E_V(x, t) + I_V(x, t),$$

$$\frac{\partial A_V}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 A_V}{\partial x^2} - d_V A_V + m_V L_V$$

$$\frac{\partial L_V}{\partial t} = b_V A_V - (m_V + d_L) L_V$$

- $A_V(x, 0) = A_V = \text{const}, L_V(x, 0) = L_V = \text{const.} \Rightarrow$
 $A_V(x, t) = A_V(t)$
- $b_V = \frac{d_V(m_V + d_L)}{m_V} \Rightarrow$ istnienie rozwiązania
stacjonarnego A_V, L_V

Uproszczony układ (S)

Niech A_V i N_R będą stałymi.

Uproszczony układ (S)

Niech A_V i N_R będą stałymi.

Układ (S)

$$\frac{\partial I_V}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 I_V}{\partial x^2} + \alpha_V \beta_R \frac{I_R}{N_R} (A_V - I_V) - d_V I_V$$

$$\frac{\partial I_R}{\partial t} = D \frac{\partial^2 I_R}{\partial x^2} + \alpha_R \beta_R \frac{N_R - I_R}{N_R} I_V - \gamma_R I_R$$

Układ (S) można zapisać jako

$$\begin{bmatrix} I_V \\ I_R \end{bmatrix}_t = \mathcal{D} \begin{bmatrix} I_V \\ I_R \end{bmatrix}_{xx} + \mathbf{f} \left(\begin{bmatrix} I_V \\ I_R \end{bmatrix} \right)$$

gdzie $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^T$ definiujemy jako

$$f_1(I_V, I_R) = \alpha_V \beta_R \frac{I_R}{N_R} (A_V - I_V) - d_V I_V$$

$$f_2(I_V, I_R) = \alpha_R \beta_R \frac{N_R - I_R}{N_R} I_V - \gamma_R I_R$$

$$\text{oraz } \mathcal{D} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

Własności układu (S), potrzebne, aby zastosować ogólne twierdzenia o falach biegnących i tempie rozprzestrzeniania się infekcji.

- f_1, f_2 są niemalejące w wyrazach poza przekątną.
- f nie zależy wprost od x ani od t .
- Macierz \mathcal{D} jest diagonalna, o wyrazach na przekątnej ściśle dodatnich.

Przestrzennie niezależny układ (S*)

Przestrzennie jednorodne rozwiązania (S) spełniają (S*), tj. układ ODE, :

$$\begin{aligned}\frac{dI_V}{dt} &= \alpha_V \beta_R \frac{I_R}{N_R} (A_V - I_V) - d_V I_V \\ \frac{dI_R}{dt} &= \alpha_R \beta_R \frac{N_R - I_R}{N_R} I_V - \gamma_R I_R\end{aligned}$$

czyli

$$\begin{bmatrix} I_V \\ I_R \end{bmatrix}_t = \mathbf{f} \left(\begin{bmatrix} I_V \\ I_R \end{bmatrix} \right)$$

Basic reproduction number

Definicja Poziom namnażania się wirusa (basic reproduction number) R_0 jest wartością oczekiwaną wtórnych zakażeń spowodowanych przez wprowadzenie pojedynczej zarażonej jednostki do układu.

Wyznaczmy R_0 .

1. Zapiszmy układ (S^*) w postaci macierzowej: nowe zakażenia (f) minus pozostałe wyrazy (v).

$$\begin{bmatrix} I_V \\ I_R \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} \alpha_V \beta_R \frac{I_R}{N_R} (A_V - I_V) \\ \alpha_R \beta_R \frac{N_R - I_R}{N_R} I_V \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_V I_V \\ \gamma_R I_R \end{bmatrix}$$

Basic reproduction number

2. Linearyzujemy f i v wokół stanu równowagi $(I_V, I_R) = (0, 0)$, gdzie wszystkie ptaki i komary są podatne na zarażenie.

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_V \beta_R \frac{A_V}{N_R} \\ \alpha_R \beta_R & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{V} = \begin{bmatrix} d_V & 0 \\ 0 & \gamma_R \end{bmatrix}$$

Basic reproduction number

3. \mathcal{R}_0 jest promieniem spektralnym (dominującą wartością własną) dla \mathcal{FV}^{-1} .

$$\mathcal{FV}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\alpha_V \beta_R}{\gamma_R} \frac{A_V}{N_R} \\ \frac{\alpha_R \beta_R}{d_V} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{R}_0 = \sqrt{\frac{\alpha_V \alpha_R \beta_R^2}{d_V \gamma_R} \frac{A_V}{N_R}}$$

Rozwiązania stacjonarne (S)

$(0, 0)$ jest rozwiązaniem stacjonarnym (S).

Rozwiązania stacjonarne (S)

$(0, 0)$ jest rozwiązaniem stacjonarnym (S).

$$I_V^* = \frac{\alpha_V \alpha_R \beta_R^2 A_V - d_V \gamma_R N_R}{\alpha_R \beta_R (d_V + \alpha_V \beta_R)}$$

$$I_R^* = \frac{\alpha_V \alpha_R \beta_R^2 A_V - d_V \gamma_R N_R}{\alpha_V \beta_R (\gamma_R + \alpha_R \beta_R \frac{A_V}{N_R})}$$

Rozwiązania stacjonarne (S)

$(0, 0)$ jest rozwiązaniem stacjonarnym (S).

$$I_V^* = \frac{\alpha_V \alpha_R \beta_R^2 A_V - d_V \gamma_R N_R}{\alpha_R \beta_R (d_V + \alpha_V \beta_R)}$$

$$I_R^* = \frac{\alpha_V \alpha_R \beta_R^2 A_V - d_V \gamma_R N_R}{\alpha_V \beta_R (\gamma_R + \alpha_R \beta_R \frac{A_V}{N_R})}$$

jest dodatnim rozwiązaniem stacjonarnym jeśli

$$(*) \quad \alpha_V \alpha_R \beta_R^2 A_V - d_V \gamma_R N_R > 0$$

czyli $\mathcal{R}_0 > 1$.

Macierz Jacobiego w punkcie $(0, 0)$

$$\mathcal{J} = \mathbf{Df}(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} -d_V & \alpha_V \beta_R \frac{A_V}{N_R} \\ \alpha_R \beta_R & -\gamma_R \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} \mathcal{J} = -(d_V + \gamma_R) < 0$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det \mathcal{J} = d_V \gamma_R - \alpha_V \alpha_R \beta_R^2 \frac{A_V}{N_R} = d_V \gamma_R (1 - \mathcal{R}_0^2)$$

Zauważmy, że (*) jest równoważny warunkowi $\det \mathcal{J} < 0 \Leftrightarrow \mathcal{R}_0 > 1$.

Płaszczyzna fazowa

$$\mathcal{R}_0 < 1$$

Stan stacjonarny (wolny od infekcji-*disease free*) $(0, 0)$ jest liniowo stabilny (węzeł).

$$\mathcal{R}_0 < 1$$

Stan stacjonarny (wolny od infekcji-*disease free*) $(0, 0)$ jest liniowo stabilny (węzeł).

$$\mathcal{R}_0 > 1$$

Stan stacjonarny $(0, 0)$ jest liniowo niestabilny (siodło) oraz istnieje endemiczny stan stacjonarny (I_V^*, I_R^*) - stabilny węzeł.

$$\mathcal{R}_0 < 1$$

Stan stacjonarny (wolny od infekcji-*disease free*) $(0, 0)$ jest liniowo stabilny (węzeł).

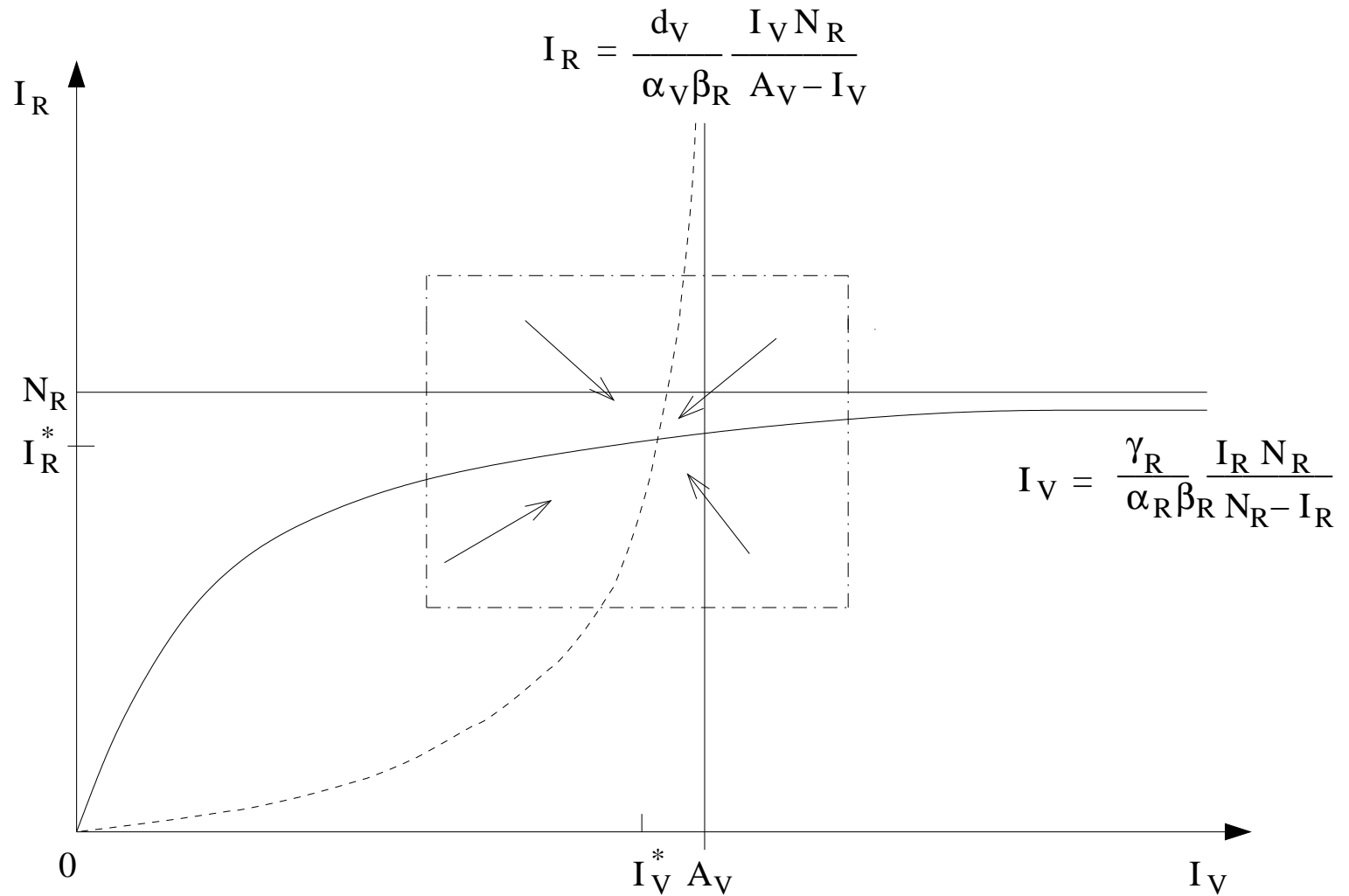
$$\mathcal{R}_0 > 1$$

Stan stacjonarny $(0, 0)$ jest liniowo niestabilny (siodło) oraz istnieje endemiczny stan stacjonarny (I_V^*, I_R^*) - stabilny węzeł.

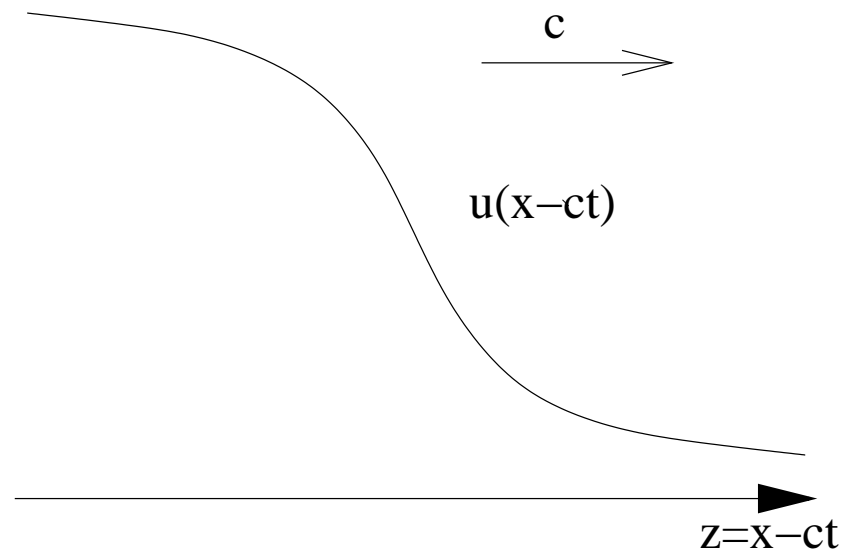
Stwierdzenie[Globalna stabilność endemicznego stanu stacjonarnego] Jeśli $\mathcal{R}_0 > 1$ oraz

$I_V(0) + I_R(0) > 0$, to endemiczny stan stacjonarny (I_V^*, I_R^*) jest globalnie asymptotycznie stabilny w pierwszej ćwiartce.

Portret fazowy $I_V, I_R (\mathcal{R}_0 > 1)$



Definicja Falą biegnącą z prędkością c dla układu (S) nazywamy rozwiązanie $\mathbf{u} \equiv (I_V, I_R)$, które ma postać $u(x - ct)$ i łączy stany stacjonarne, a przy tym $\mathbf{u}(-\infty) = \mathbf{u}^* \equiv (I_V^*, I_R^*)$ oraz $\mathbf{u}(\infty) = \mathbf{0} \equiv (0, 0)$.



Twierdzenie Istnieje minimalna prędkość fal biegnących c_0 taka, że dla każdego $c \geq c_0$ nieliniowy układ (S) ma nierosnące rozwiązanie postaci fali biegnącej $(I_V(x - ct), I_R(x - ct))$ o prędkości c takie, że

$$(I_V(-\infty), I_R(-\infty)) = (I_V^*, I_R^*)$$

oraz

$$(I_V(\infty), I_R(\infty)) = (0, 0).$$

Jeśli $c < c_0$, nie istnieje fala biegnąca o tej postaci.

Korzystamy z ogólniejszego twierdzenia (Li, Weinberger, Lewis, Volpert).

Prędkość rozprzestrzeniania się infekcji i fale biegnące

Definicja Prędkością rozprzestrzeniania się infekcji dla nieliniowego układu

$$\mathbf{u}_t = \mathcal{D}\mathbf{u}_{xx} + \mathbf{f}(\mathbf{u}),$$

z macierzą dyfuzji \mathcal{D} , gdzie $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{f}(\mathbf{u}^*) = \mathbf{0}$ oraz $\mathbf{u}^* > \mathbf{0}$, z niezerowymi warunkami początkowymi na zwartym zbiorze, nazywamy liczbę c^* taką, że dla małych $\epsilon > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{|x| \geq (c^* + \epsilon)t} \|\mathbf{u}(t, x)\| \right\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{|x| \leq (c^* - \epsilon)t} \|\mathbf{u}(t, x) - \mathbf{u}^*\| \right\} = 0$$

*Prędkość fali vs c^**

Twierdzenie Minimalna prędkość fali c_0 dla układu (S) jest równa c^* , czyli prędkości rozprzestrzeniania się infekcji dla tego układu.

Prędkość fali vs c^*

Twierdzenie Minimalna prędkość fali c_0 dla układu (S) jest równa c^* , czyli prędkości rozprzestrzeniania się infekcji dla tego układu.

Prędkość fali trudno znaleźć, ale wielkość c^* można wyznaczyć badając zlinearyzowany układ; zastosujemy rezultat Weinbergera, Lewisa, Li.

Zlinearyzowany układ (L)

$$\begin{bmatrix} I_V \\ I_R \end{bmatrix}_t = \mathcal{D} \begin{bmatrix} I_V \\ I_R \end{bmatrix}_{xx} + \mathcal{J} \begin{bmatrix} I_V \\ I_R \end{bmatrix}$$

gdzie

$$\mathcal{J} = \mathbf{Df}(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} -d_V & \alpha_V \beta_R \frac{A_V}{N_R} \\ \alpha_R \beta_R & -\gamma_R \end{bmatrix}$$

oraz

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

Funkcja f

$$f_1(I_V, I_R) = \alpha_V \beta_R \frac{I_R}{N_R} (A_V - I_V) - d_V I_V$$

$$f_2(I_V, I_R) = \alpha_R \beta_R \frac{N_R - I_R}{N_R} I_V - \gamma_R I_R$$

spełnia **warunek podstyczości** , czyli dla $\rho > 0$

$$\mathbf{f} \left(\rho \begin{bmatrix} I_V \\ I_R \end{bmatrix} \right) \leq \rho \mathbf{Df}(\mathbf{0}) \begin{bmatrix} I_V \\ I_R \end{bmatrix} = \rho \mathcal{J} \begin{bmatrix} I_V \\ I_R \end{bmatrix}$$

Liniowa odpowiedniość

Twierdzenie (i) Prędkość rozprzestrzeniania się infekcji c^* nieliniowego układu (S) oraz prędkość \bar{c} dla zlinearyzowanego układu (L) istnieją oraz $c^* = \bar{c}$.
(ii) Prędkość rozprzestrzenienia się \bar{c} dla układu (L) jest dana wzorem

$$\bar{c} = \inf_{\lambda > 0} \sigma_1(\lambda)$$

gdzie $\sigma_1(\lambda)$ jest największą wartością własną macierzy

$$B_\lambda = \frac{\mathcal{J} + \lambda^2 \mathcal{D}}{\lambda}$$

Prędkość rozprzestrzeniania się \bar{c}

Wielomian charakterystyczny dla B_λ

$$p(\sigma; \lambda, \varepsilon) = \sigma^2 - \sigma \frac{\text{tr} \mathcal{J} + (D + \varepsilon) \lambda^2}{\lambda} + \frac{\det \mathcal{J}}{\lambda^2} - D d_V - \varepsilon \gamma_R + \varepsilon D \lambda^2$$

Prędkość rozprzestrzeniania się \bar{c}

Wielomian charakterystyczny dla B_λ

$$p(\sigma; \lambda, \varepsilon) = \sigma^2 - \sigma \frac{\text{tr} \mathcal{J} + (D + \varepsilon)\lambda^2}{\lambda} + \frac{\det \mathcal{J}}{\lambda^2} - Dd_V - \varepsilon\gamma_R + \varepsilon D\lambda^2$$

$$P(\sigma; \lambda) = \lambda^2 p(\sigma; \lambda, 0)$$

Prędkość rozprzestrzeniania się \bar{c}

Wielomian charakterystyczny dla B_λ

$$p(\sigma; \lambda, \varepsilon) = \sigma^2 - \sigma \frac{\text{tr} \mathcal{J} + (D + \varepsilon)\lambda^2}{\lambda} + \frac{\det \mathcal{J}}{\lambda^2} - Dd_V - \varepsilon\gamma_R + \varepsilon D\lambda^2$$

$$P(\sigma; \lambda) = \lambda^2 p(\sigma; \lambda, 0)$$

Q - rugownik (*resultant*) wielomianu P i pochodnej $\frac{\partial P}{\partial \lambda}$

Prędkość rozprzestrzeniania się \bar{c}

Wielomian charakterystyczny dla B_λ

$$p(\sigma; \lambda, \varepsilon) = \sigma^2 - \sigma \frac{\text{tr} \mathcal{J} + (D + \varepsilon)\lambda^2}{\lambda} + \frac{\det \mathcal{J}}{\lambda^2} - Dd_V - \varepsilon\gamma_R + \varepsilon D\lambda^2$$

$$P(\sigma; \lambda) = \lambda^2 p(\sigma; \lambda, 0)$$

Q - rugownik (*resultant*) wielomianu P i pochodnej $\frac{\partial P}{\partial \lambda}$

Twierdzenie Przy $\varepsilon \rightarrow 0$, prędkość rozprzestrzeniania się $c^* = \bar{c}$ dla nieliniowego układu (S) zbiega do pierwiastka z największej wartości własnej wielomianu $Q(x)$.

$$Q(c^2) = c^6 + c^4 D(-4\theta^3 + 12d_V j - 2d_V \theta^2 + 18\theta j) \\ + c^2 D^2(-18\theta d_V j - 12d_V^2 j + d_V^2 \theta - 27j^2) + 4D^3 d_V^3 j$$

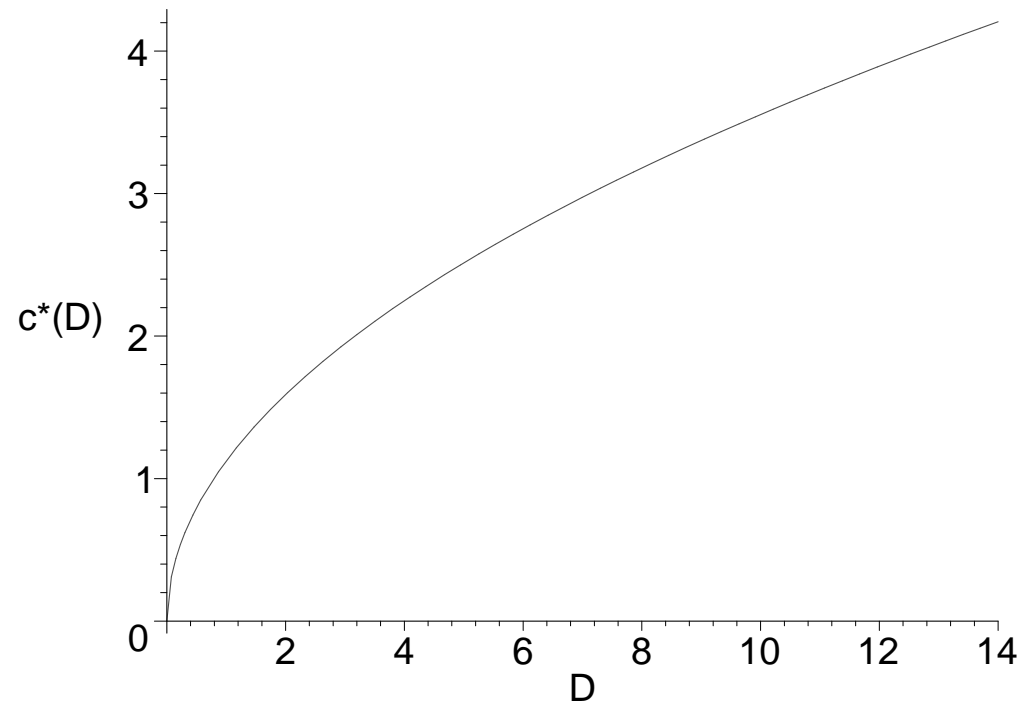
gdzie

$$j = \det \mathcal{J}, \quad \theta = \operatorname{tr} \mathcal{J}$$

oraz D jest współczynnikiem dyfuzji ptaków.

Oszacowania numeryczne

dla $c^* = \bar{c} \mathbf{z} \varepsilon = 0$



c^* ($[\frac{km}{dzien}]$) jako funkcja dyfuzji D . Dla $A_V/N_R = 20$, $\beta_R = 0.3$, $\gamma_R = 0.01$, $d_V = 0.029$, $\alpha_V = 0.16$, $\alpha_R = 0.88/dzien$, obserwowana prędkość rozprzestrzeniania się $2.74km/dzien$ odpowiada współczynnikowi dyfuzji D rzędu $5.94km^2/dzien$.

- Układ (P)

$$\frac{\partial L_V}{\partial t} = b_V(S_V + E_V + I_V) - m_V L_V - d_L L_V$$

$$\frac{\partial S_V}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 S_V}{\partial x^2} - \alpha_V \beta_R \frac{I_R}{N_R} S_V + m_V L_V - d_V S_V$$

$$\frac{\partial E_V}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 E_V}{\partial x^2} + \alpha_V \beta_R \frac{I_R}{N_R} S_V - (\kappa_V + d_V) E_V$$

$$\frac{\partial I_V}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 I_V}{\partial x^2} + \kappa_V E_V - d_V I_V$$

$$\frac{\partial S_R}{\partial t} = D \frac{\partial^2 S_R}{\partial x^2} - \alpha_R \beta_R \frac{S_R}{N_R} I_V + \eta_R R_R$$

$$\frac{\partial I_R}{\partial t} = D \frac{\partial^2 I_R}{\partial x^2} + \alpha_R \beta_R \frac{S_R}{N_R} I_V - \gamma_R I_R$$

$$\frac{\partial R_R}{\partial t} = D \frac{\partial^2 R_R}{\partial x^2} + \gamma_R I_R - \eta_R R_R$$

- Układ (P)

- Układ (S)

$$\frac{\partial I_V}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 I_V}{\partial x^2} + \alpha_V \beta_R \frac{I_R}{N_R} (A_V - I_V) - d_V I_V$$

$$\frac{\partial I_R}{\partial t} = D \frac{\partial^2 I_R}{\partial x^2} + \alpha_R \beta_R \frac{N_R - I_R}{N_R} I_V - \gamma_R I_R$$

- Układ (P)

- Układ (S)

- Układ (S*)

$$\frac{dI_V}{dt} = \alpha_V \beta_R \frac{I_R}{N_R} (A_V - I_V) - d_V I_V$$

$$\frac{dI_R}{dt} = \alpha_R \beta_R \frac{N_R - I_R}{N_R} I_V - \gamma_R I_R$$

- Układ
(P)

- Układ
(S)

- Układ
(S*)

- Układ
(L)

$$\frac{\partial I_V}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 I_V}{\partial x^2} + \alpha_V \beta_R A_V \frac{I_R}{N_R} - d_V I_V$$

$$\frac{\partial I_R}{\partial t} = D \frac{\partial^2 I_R}{\partial x^2} + \alpha_R \beta_R I_V - \gamma_R I_R$$

Układ (P)

Układ (P)



Układ uproszczony (S)

Układ (P)



Układ uproszczony (S)

fale biegnące



Układ jednorodny (S^*)
(rozwiązania stacjonarne)

Układ (P)



Układ uproszczony (S)

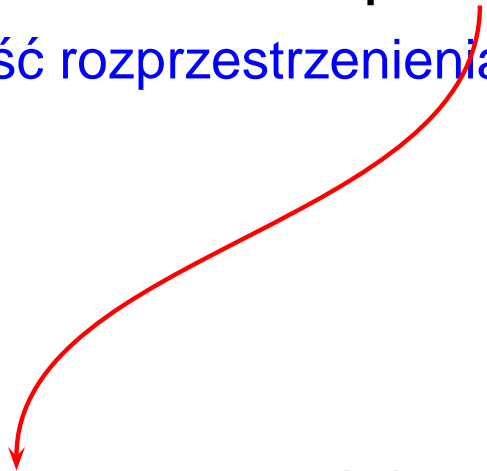
prędkość rozprzestrzenienia, fale biegnące

Układ (P)



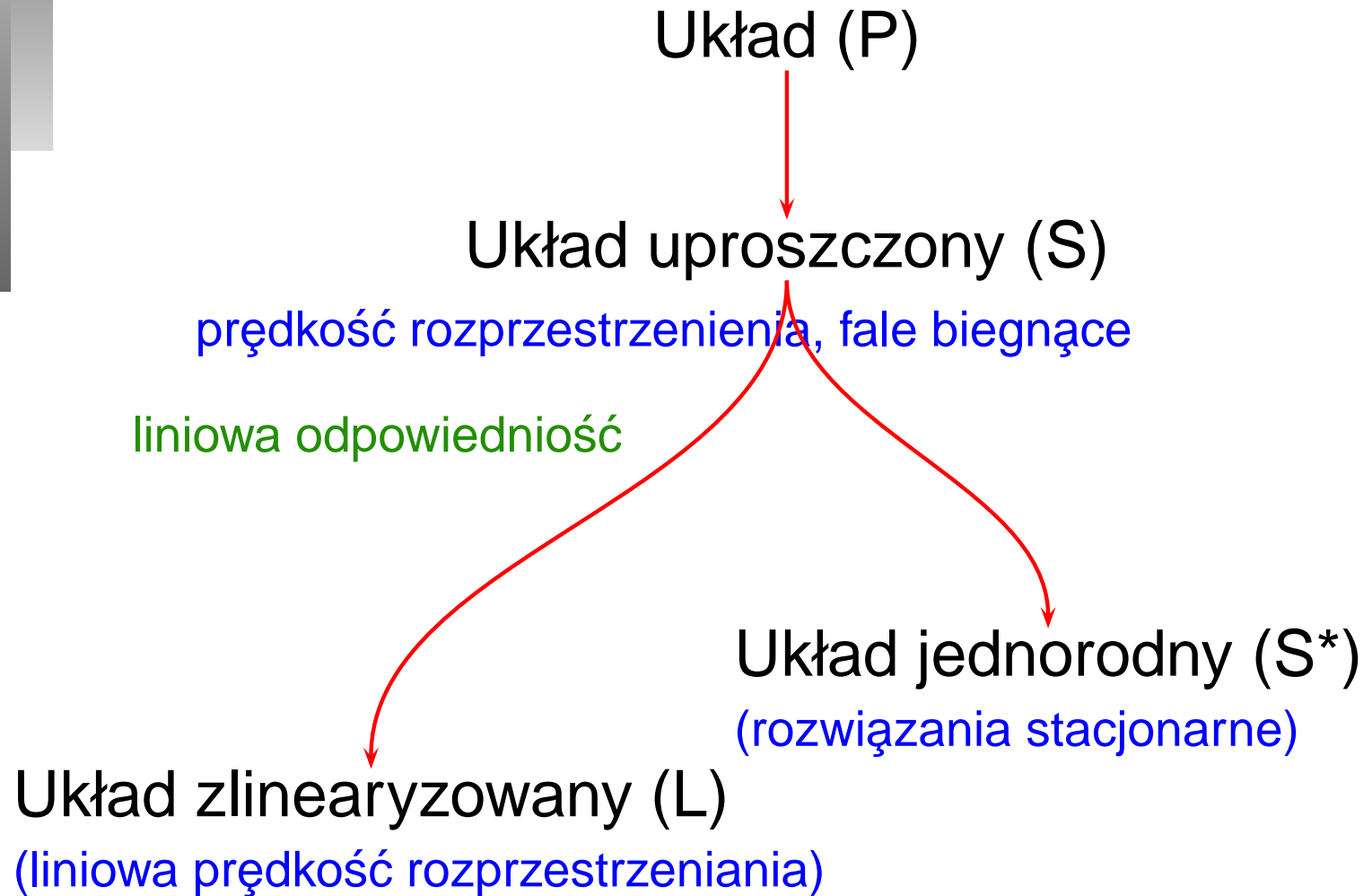
Układ uproszczony (S)

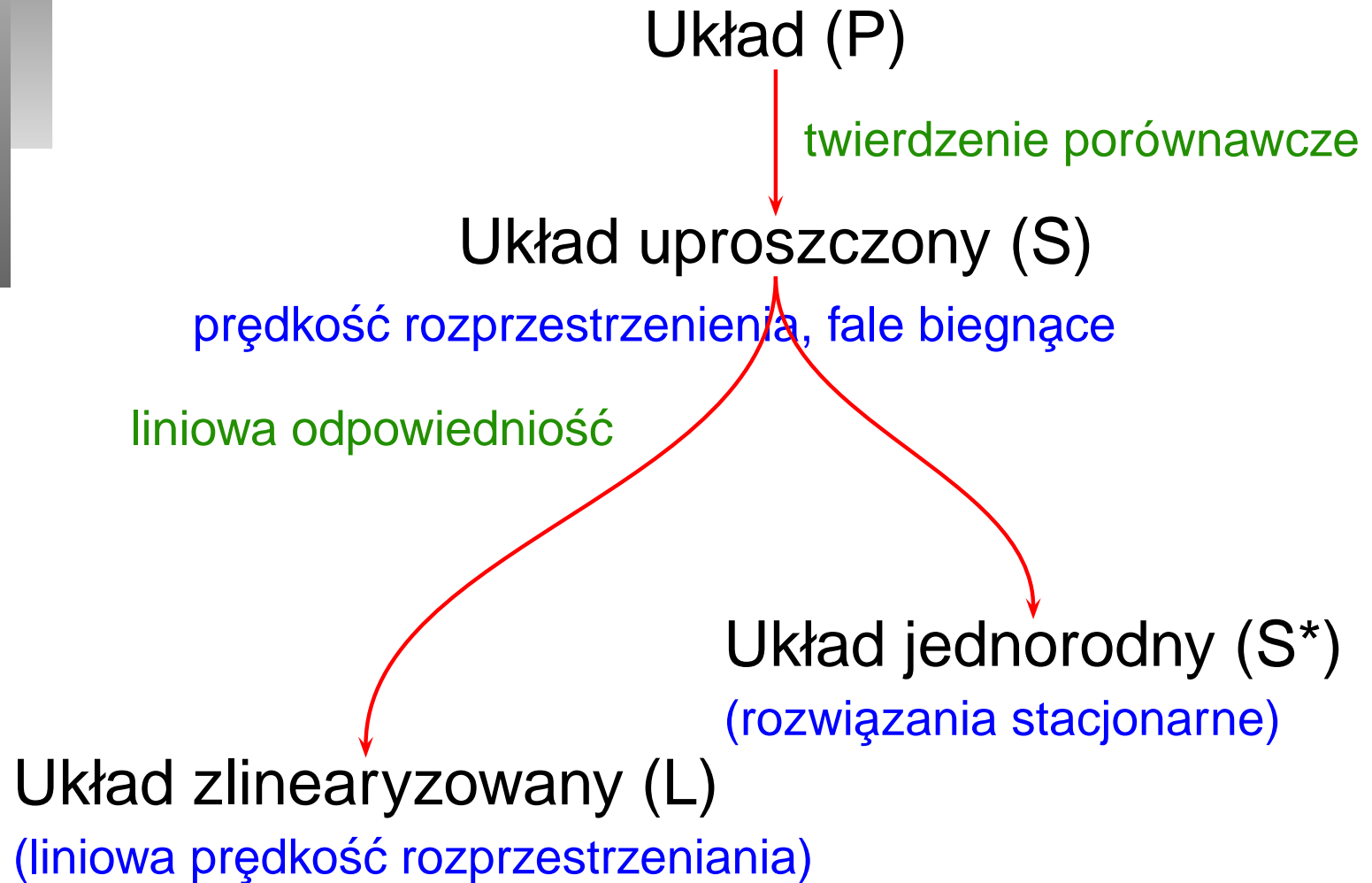
prędkość rozprzestrzeniania, fale biegnące



Układ zlinearyzowany (L)

(liniowa prędkość rozprzestrzeniania)





Układ uproszczony (S) przy \tilde{A}_V, \tilde{N}_R .

$$\frac{\partial I_V}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 I_V}{\partial x^2} + \alpha_V \beta_R \frac{I_R}{\tilde{N}_R} \left(\tilde{A}_V - I_V \right) - d_V I_V$$

$$\frac{\partial I_R}{\partial t} = D \frac{\partial^2 I_R}{\partial x^2} + \alpha_R \beta_R \frac{\tilde{N}_R - I_R}{\tilde{N}_R} I_V - \gamma_R I_R$$

gdzie \tilde{A}_V, \tilde{N}_R są stałymi.

Twierdzenia porównawcze

Twierdzenie Załóżmy, że $N_R(x, 0) = \tilde{N}_R$,

$$b_V = \frac{d_V(m_V + d_L)}{m_V},$$

$$L_V(x, 0) = L_{V0} = \text{const.}, \quad A_V(x, 0) = A_{V0} = \text{const.}$$

Wtedy składowe (I_V, I_R) rozwiązania układu (P) są ograniczone z góry przez rozwiązania (\bar{I}_V, \bar{I}_R) uproszczonego układu (S) jeśli

$$\max \left(A_{V0}, A_{V0} - \frac{d_V A_{V0} - m_V L_{V0}}{m_V + d_V + d_L} \right) \leq \tilde{A}_V$$

oraz

$$(I_V(0) + E_V(0), I_R(0)) \leq (\bar{I}_V(0), \bar{I}_R(0)).$$

Twierdzenia porównawcze

Twierdzenie Załóżmy, że założenia poprzedniego twierdzenia są spełnione oraz

$$d_V \gamma_R \left(1 + \frac{d_V}{\kappa_V} \right) < \alpha_V \alpha_R \beta_R^2 \frac{\tilde{A}_V}{\tilde{N}_R}$$

Jeśli prędkość rozprzestrzeniania się infekcji dla układu (P) istnieje i jest równa c_P^* , to $c_P^* \leq c^*$, gdzie c^* jest prędkością rozprzestrzeniania się dla uproszczonego układu (S).

Twierdzenia porównawcze

Uwaga Warunek

$$d_V \gamma_R \left(1 + \frac{d_V}{\kappa_V} \right) < \alpha_V \alpha_R \beta_R^2 \frac{\tilde{A}_V}{\tilde{N}_R}$$

jest równoważny nierówności

$$\mathcal{R}_0 = \sqrt{\frac{\alpha_V \alpha_R \beta_R^2 \tilde{A}_V \kappa_V}{d_V \gamma_R \tilde{N}_R (\kappa_V + d_V)}} > 1,$$

gdzie \mathcal{R}_0 jest poziomem namnażania się wirusa (*basic reproduction number*) dla układu ODE odpowiadającego układowi (P).