## SKRÓCONY OPIS PROJEKTU

### 1. Cel naukowy projektu

Jednym z fundamentalnych problemów fizyki jest zrozumienie dlaczego w odpowiednio niskich temperaturach ciała makroskopowe przyjmują postać kryształów [1–3]. Dlaczego atomy i molekuły układają się w przestrzennie-okresowe konfiguracje? Fundamentalne prawo fizyki statystycznej mówi nam, że równowagowe zachowanie się układu wielu oddziałujących cząstek jest wynikiem rywalizacji pomiędzy energią a entropią układu prowadzącej do minimalizacji energii swobodnej. W odpowiednio niskich temperaturach możemy zazwyczaj pominąć wkład entropii do energii swobodnej, rozkład prawdopodobieństwa położeń cząsteczek jest skoncentrowany wtedy na konfiguracjach minimalizujących energię układu. Problem istnienia kryształów sprowadza się wtedy do pytania: dlaczego konfiguracje przestrzenne cząsteczek minimalizujące energię oddziaływań są okresowe?

Odkrycie kwazikryształów przez Dana Schechtmana w 1982 roku pokazało, że wbrew temu co przez lata twierdzili fizycy, minimalizacja energii niekoniecznie musi prowadzić do struktur okresowych [4]. Klasyczny problem kryształu ma w związku z tym nowe sformułowanie: jak wyprowadzić daleko-zasięgowy porządek (krystaliczny albo kwazikrystaliczny) z translacyjnie-niezmienniczych oddziaływań między cząsteczkami?

W niniejszym projekcie badawczym będziemy rozważać klasyczne gazy sieciowe. W takich modelach, w każdym węźle nieskończonej regularnej kraty kwadratowej lub sześciennej znajduje się jedna cząstka określonego typu. Zwróćmy uwagę, że krata jest okresowa, natomiast nieokresowe moga być konfiguracje cząstek czyli przypisanie typów czastek do węzłów kraty. Czastki oddziaływuja ze sobą translacyjnie-niezmienniczymi potencjałami skończonego lub nieskończonym zasięgu. Będziemy konstruować i badać przykłady oddziaływań, dla których wszystkie konfiguracje minimalizujące energię czyli tak-zwane konfiguracje stanu podstawowego są nieokresowe, natomiast istnieje jedyna translacyjnie-niezmiennicza miara mająca nieokresowe konfiguracje stanu podstawowego w swoim nośniku. Miarę taką, ergodyczną ze względu na przesunięcia, będziemy nazywać nieokresowa miarą stanu podstawowego. Będziemy chcieli wykazać, że nieokresowe stany podstawowe są stabilne ze względu na małe zaburzenia oddziaływań (zero-temperaturowa stabilność) oraz ze względu na ruchy cieplne (niskotemperaturowa stabilność). Badanie stabilności struktur nieokresowych jest motywem przewodnim naszego projektu. W niezerowej temperaturze minimalizacja energii swobodnej jest osiągana przez stan układu opisywany przez tak-zwane miary Gibbsa, które w granicy zerowej temperatury stają się stanami podstawowymi. Możemy teraz precyzyjnie postawić główny problem - zadanie badawcze naszego projektu.

**Główny problem otwarty**: Czy istnieje klasyczny gas sieciowy z translacyjnie-niezmienniczym oddziaływaniem skończonego zasięgu, z nieokresowym stanem podstawowym oraz z niskotemperaturową nieokresową miarą Gibbsa?

Odpowiedź na to pytanie może zależeć od wymiaru układu. Wiele lat temu postawiona hipoteza mówi, że dwuwymiarowe gazy sieciowe ze skończenie-zasięgowymi oddziaływaniami posiadają co najwyżej skończoną liczbę extremalnych miar Gibbsa, co wyklucza nieokresowe miary, których byłoby nieprzeliczalnie wiele. Wspomnieć należy tutaj pracę Gácsa, w której twierdzi, że skonstruował jednowymiarowy probabilistyczny automat komórkowy z nieskończoną liczbą miar stacjonarnych [5]. Miarom takim odpowiadałyby miary Gibbsa na dwuwymiarowej czasoprzestrzeni [6]. W ramach niniejszego projektu przestudiujemy koncepcje Gacsa w kontekście istnienia nieokresowych miar Gibbsa.

Skończenie-zasięgowe modele gazów sieciowych bez okresowych stanów podstawowych konstruowane są przy pomocy nieokresowych parkietaży. Problem istnienia nieokresowych parkietaży pojawił się w jednym z problemów Hilberta z 1900 roku. Druga część 18-tego problemu może być sformułowana w następujący sposób: czy istnieje wielobok, taki że mając do dyspozycji nieskończenie wiele jego kopii możemy pokryć nieskończoną płaszczyznę ale tylko w sposób nieokresowy?

Zmodyfikowana wersja problemu Hilberta została zaprezentowana przez Wanga w 1961 roku w kontekście problemu roztrzygalności w logice. Dachówki Wanga (zwane także dominami) to kwadraty z wypustkami i wcięciami, które muszą być dopasowane do siebie dla sąsiednich dachówek. Wang postawił hipotezę, że jeżeli można pokryć płaszczyznę takimi dachówkami, to można ją pokryć w sposób okresowy. Zauważmy, że w każdym takim pokryciu, środki dachówek tworzą sieć kwadratową. Pierwszy kontrprzykład wymagający ponad 20 tysięcy typów dachówek został skonstruowany przez Bergera w 1966 roku [7]. W ostatniej konstrukcji występuje 11 typów dachówek [8].

Z każdym nieokresowym parkietażem związany jest model gazu sieciowego na sieci kwadratowej z oddziaływaniem najbliższych (i ewentualnie następnych) sąsiadów: dachówkom odpowiadają cząstki, jeżeli dwie dachówki nie są do siebie dopasowane, to energia oddziaływania odpowiadających im cząstek jest dodatnia.

Można łatwo pokazać, że taki gaz sieciowy posiada tylko nieokresowe konfiguracje stanu podstawowego (o zerowej energii) odpowiadające nieokresowym parkietażom. Dla tak skonstruowanych gazów sieciowych będziemy chcieli wykazać istnienie niskotemperaturowych nieokresowych miar Gibbsa, które byłyby małymi zaburzeniami nieokresowych konfiguracji stanów podstawowych. Wymagać to bedzie modyfikacji isniejących już układów dachówkowych w celu uzyskania określonych własności przydatnych przy konstrukcji extremalnych miar Gibbsa. Mamy tu zwłaszcza na uwadze szybką zbieżność częstości występowania lokalnych konfiguracji [9, 10]. Ostatnie konstrukcje nieokresowych parkietaży [11] dają nadzieję na wymagane modyfikacje.

Drugą klasą nieokresowych struktur, które będziemy badać, to tak-zwane ergodyczne układy podstawieniowe, na przykład typu Thue-Morse'a [12]. W odróżnieniu od układów dachówkowych nie są to układy skończonego typu. Naszym zadaniem jest tutaj znalezienie minimalnej liczby zabronionych lokalnych konfiguracji, które jednoznacznie charakteryzują daną miarę ergodyczną. Pozwoli to na konstrukcję względnie prostych Hamiltonianów - oddziaływań, dla których dane nieokresowe miary ergodyczne są jedynymi stanami podstawowymi [13]. Skonstruowane przez nas jednowymiarowe oddziaływania zostaną następnie rozszerzone do modelu trójwymiarowego poprzez dodanie ferromagnetycznych oddziaływań typu Isinga w dwóch dodatkowych kierunkach przestrzennych. Korzystając z tego, że dwuwymiarowy ferromagnetyczny model Isinga posiada dwie extremalne miary Gibbsa poniżej temperatury krytycznej Curie, będziemy chcieli wykazać, że poniżej odpowiedniej temperatury, istnieje miara Gibbsa, która jest małym zaburzeniem danej nieokresowej miary ergodycznej.

Nasz projekt ma charakter interdyscyplinarny. Zadania badawcze są inspirowane problemami z fizyki statystycznej, teorii ergodycznej, układów dynamicznych i teoretycznej informatyki. Fundamentalnym celem jest zrozumienie przyczyn występowania porządku w fizycznych układach i matematycznych strukturach. Chcemy odpowiedzeć na pytanie jakie są wystarczające i konieczne warunki stabilności nieokresowych struktur, w szczególności niekresowych stanów podstawowych.

**2. Znaczenie projektu**

Matematyczne badania struktur nieokresowych były powadzone od wielu lat. Odkrycie kwazikryształów w 1982 roku [4] zintensyfikowało tę działalność. Różne konstrukcje struktur nieokresowych przestały być abstrakcyjnymi modelami, stało się jasne, że ich matematyczna analiza może dostarczyć nowych idei w fizyce kwazikryształów. Jednocześnie motywacje fizyczne miały decydujący wpływ na rozwój teorii ergodycznej, topologii, geometrii, teorii liczb i wielu innych dziedzin matematyki.

Pierwszy klasyczny gaz sieciowy bez okresowych stanów podstawowych skonstruowany został przez Radina w [14]. Następnie w serii prac Radina i autora niniejszego projektu analizowano stabilność takich modeli. Udowodniono, że generycznie (w sensie kategorii Baira) klasyczne gazy sieciowe z oddziaływaniami nieskończonego zasięgu posiadają nieokresowe ergodyczne stany podstawowe, które są niemieszające, a więc w pewien sposób uporządkowane [15, 16]. Jeżeli chodzi o stabilność niskotemperaturową, to najlepszym wynikiem jest model z ciągiem temperatur krytycznych, w których następuje podwojenie okresu miary Gibbsa; niestety ciąg ten zbiega do zera, a więc w dodatnich temperaturach miary Gibbsa są okresowe [17], patrz też [18].

W jednowymiarowych gazach sieciowych z oddziaływaniami daleko-zasięgowymi [19] i w trójwymiarowych modelach z oddziaływaniami zanikającymi wykładniczo [20], udowodniono istnienie nieokresowych miar Gibbsa. W modelach tych konfiguracjami stanów podstawowych są ciagi Thue-Morse'a. Korzystając z z charakteryzacji ciągów Thue-Morse'a za pomoca minimalnego zbioru zabronionych lokalnych konfiguracji skonstruowano odpowiedni jednowymiarowy Hamiltonian przypisujący zabronionym konfiguracjom dodatnią energię [13]. Znalezienie minimalnych zbiorów zabronionych lokalnych konfiguracji dla innych układów podstawieniowych umożliwi nam konstrukcje nowych modeli gazów sieciowych z nieokresowymi stanami podstawowymi, dla których możliwe będzie skonstruowanie nieokresowych miar Gibbsa dla oryginalnego Hamiltonianu, a nie jego niekonstruktywnych zaburzeń jak to miało miejsce w [19, 20].

W naszym projekcie badawczym zajmiemy się hipotezami związanymi ze strukturami nieokresowymi. Bedziemy chcieli odpowiedzieć na fundamentalne pytanie: w jaki sposób globalny nieokresowy porządek jest wynikiem implementacji lokalnych translacyjnie-niezmienniczych reguł?

**3. Koncepcja i plan badań**

Nasz projekt jest poświęcony fundamentalnemu problemowi istnienia nieokresowych miar Gibbsa w klasycznych gazach sieciowych z oddziaływaniami blisko-zasięgowymi.

Rozpoczniemy od obliczania miar spektralnych operatora przesunięcia i rozkładu pokrywania się konfiguracji dla dynamicznych układów podstawieniowych i dachówkowych [21–24]. Zbadamy relacje pomiędzy tymi dwoma pojęciami charakteryzującymi porządek w strukturach nieokresowych (na przykład w układzie "składania papieru" [22] oba rozkłady są jednakowe). Specjalną uwagę poświęcimy konfiguracjom najbardziej jednorodnym [25].

W przypadku struktur jednowymiarowych pierwszym etapem badań będzie znajdywanie minimalnego zbioru zabronionych lokalnych konfiguracji, który jednoznacznie charakteryzuje daną miarę ergodyczną, w nośniku której znajdują się rozważane konfiguracje nieokresowe. Pozwoli to nam na konstrukcję zanikających wykładniczo jednowymiarowych oddziaływań, których jedynym stanem podstawowym jest dana miara ergodyczna. Wyniki tego typu uzyskano dla ciągów Thue-Morse'a w [13]. W niniejszym projekcie chcielibyśmy uzyskać podobne wyniki dla innych układów podstawieniowych oraz konfiguracji najbardziej jednorodnych. Skonstruowane przez nas jednowymiarowe Hamiltoniany, uzupełnione o ferromagnetyczne oddziaływania typu Isinga w dwóch dodatkowych kierunkach przestrzennych, posiadają konfiguracje stanów podstawowych, które w każdej płaszczyźnie ferromagnetycznej są jednorodne. Będziemy chcieli udowodnić, przy pewnych dodatkowych warunkach, istnienie nieokresowych miar Gibbsa dla takich oddziaływań trójwymiarowych, wstepne wyniki uzyskano w [20], patrz też [19].

Prace nad modelami skończenie zasięgowych rozpoczniemy od analizy i ewentualnej modyfikacji ostatnio skonstruowanych nieokresowych parkietaży [11]. Parkietaże te wykazują pewną odporność na zaburzenia stochastyczne. Sprawdzimy czy własności te są wystarczające do konstrukcji nieokresowych miar Gibbsa, a konkretnie jak własności nowych parkietaży korespondują z warunkiem szybkiej zbieżności częstości lokalnych konfiguracji. Warunek ten został zaproponowany w [9], patrz też [10], jako hipotetyczny warunek wystarczający i konieczny niskotemperaturowej stabilności struktur nieokresowych. Będziemy weryfikowali tą hipotezę w ramach naszego projektu.

Autorzy pracy [11] zwracaja uwagę, że idee ich konstrukcji są podobne do idei Gácsa użytych w konstrukcji jednowymiarowych nieergodycznych automatów komórkowych [5]. W ramach naszego projektu zbadamy w jaki sposób automaty Gácsa mogą być pomocne w konstrukcji nieokresowych miar Gibbsa. Czy dynamiczny charakter automatów komórkowych może ułatwić stabilizację nieokresowych konfiguracji?

**Zadania badawcze:**

1. **Miary spektralne operatora przesunięcia i rozkłady pokrywania się konfiguracji**

   Obliczanie miar spektralnych operatora przesunięcia i rozkładów prawdopodobieństwa pokrywania się konfiguracji w jednowymiarowych układach podstawieniowych, układach najbardziej jednorodnych oraz dwuwymiarowych układach dachówkowych.

   Generyczne układy dynamiczne są słabo mieszające ale nie mieszające. Generyczne operatory mają ciągłe widmo. Sprawdzimy czy zachodzi to również generycznie dla miar stanów podstawowych.

   Sprawdzimy czy jeśli widmo dyfrakcyjne nie zawiera składnika asbolutnie ciągłego, to czy to samo zachodzi dla widma operatora przesunięcia.

   Charakterystyka układów, dla których miara spektralna operatora przesunięcia i rozkład pokrywania się konfiguracji są takie same.

2. **Warstwowe miary Gibbsa dla szybko-zanikających oddziaływań**

   Konstrukcja wykładniczo zanikających oddziaływań mających jako stany podstawowe jednowymiarowe struktury scharakteryzowane jednoznacznie przez minimalny zbiór niedozwolonych lokalnych konfiguracji. Konstrukcja miar Gibbsa dla układów trójwymiarowych z powyższymi oddziaływaniami w jednym kierunku i ferromagnetycznymi oddziaływaniami typu Isinga w dwóch pozostałych kierunkach. Wyznaczenie warunków koniecznych i wystarczających dla istnienia nieokresowych miar Gibbsa w takich gazach sieciowych.

3. **Nieokresowe miary Gibbsa dla oddziaływań skończenie zasięgowych**

   Konstrukcja miar Gibbsa dla skończenie-zasięgowych oddziaływań w oparciu o ostatnie przykłady nieokresowych parkietaży. Przeprowadzenie dowodu istnienia nieokresowych miar Gibbsa dla abstrakcyjnego gazu sieciowego spełniającego warunek szybkiej zbieżności częstotliwości występowania lokalnych konfiguracji. Konstrukcja nieokresowego parkietażu o tej własności.

4. **Miary Gibbsa w probabilistycznych automatach komórkowych**

   Zbadamy możliwość skonstruowania dla danego nieokresowego parkietażu deterministycznego automatu komórkowego z własnością erozji skończonych zbiorów błędów - niedopasowanych dachówek. Wtedy korzystając z techniki Gacsa pokazalibyśmy, że startując z parkietażu z małą gęstością niezależnych błędów, automat komórkowy zbiegłby do nieskończonego parkietażu. Chcielibyśmy rozszerzyć to rozumowanie na dowolny rodzaj błędów. Pozwoliłoby to nam skonstruować trójwymiarową nieokresową miarę Gibbsa.

Sprawdzimy przydatność konstrukcji Gacsa dla wykazania istnienia 2-wymiarowych nieokresowych miar Gibbsa.

## 4. Metodyka badań

Wszystkie nasze zadania badawcze dotyczą modeli dyskretnych, a w szczególności klasycznych gazów sieciowych. Będziemy analizować własności nieokresowych układów symboli lub cząstek na regularnych kratach. Będziemy konstruować Hamiltoniany, dla których dane struktury nieokresowe są konfiguracjami stanów podstawowych, które minimalizują energię oddziałujących cząstek.

W gazach sieciowych w każdym węźle kraty $Z^d$, $d \geq 1$ znajduje się jedna cząstka określonego typu. Mamy $n$ typów cząstek.

$\Omega = \{1,...,n\}^{Z^d}$ jest zbiorem konfiguracji cząstek, zbiorem zwartym w topologii produktowej.

Jednym z podstawowych pojęć fizyki statystycznej jest konfiguracją stanu podstawowego.

$X \in \Omega$ jest **konfiguracją stanu podstawowego** Hamiltonianu $H$
jeśli dla każdego lokalnego wzbudzenia, $Y$, konfiguracji która różni się od $X$ na skończonej liczbie węzłów sieci, $H(Y|X) \geq 0$, gdzie $H(Y|X)$ jest różnicą energii konfiguracji $Y$ i $X$.

W ramach naszego projektu będziemy badać układy bez okresowych konfiguracji stanów podstawowych ale z jedną translacyjnie niezmienniczą ergodyczną miarą stanu podstawowego, w nośniku której znajdują się wszystkie konfiguracje stanu podstawowego. Miarę taką będziemy nazywać nieokresową miarą stanu podstawowego. Zbiór konfiguracji stanów podstawowych wraz z ergodyczną miarą stanu podstawowego i naturalnie działającym na przestrzeni konfiguracji operatorem przesunięcia jest symbolicznym układem dynamicznym. Będziemy rozważać układy dynamiczne odpowiadające nieokresowym parkietażom, układom podstawieniowym oraz innym strukturom nieokresowym. Nasze badania wychodzą poza tradycyjną teorię ergodyczną; wszelkie pojęcia, relacje i twierdzenia z teorii ergodycznej będą rozważane w kontekście istnienia Hamiltonianów, dla których dane miary są miarami stanu podstawowego.

Dla powyżej zdefiniowanych układów dynamicznych będziemy badać widmo operatora przesunięcia w przestrzeni $L^2(\mu)$ z daną miarą ergodyczną $\mu$ [21] oraz rozkład prawdopodobieństwa pokrywania się konfiguracji zdefiniowany w następujący sposób [24].

Dla dwustronnych ciągów $X$ i $Y$ symboli $\{+,-\}$ w nośniku ergodycznej miary $\mu$, ich pokrywanie się to

$$q_{XY} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X(i)Y(i).$$

$p(q)$ jest rozkładem $q_{XY}$ w mierze produktowej $\mu \otimes \mu$. Będziemy poszukiwać relacji pomiędzy widmem operatora przesunięcia a rozkładem pokrywania się dla różnych klas miar ergodycznych.

W niezerowej temperaturze $T$ minimalizacja energii swobodnej jako funkcjonału na miarach zachodzi dla miar Gibbsa. Niech $X \in \Omega$ będzie nieokresową konfiguracją stanu podstawowego dla Hamiltonianu $H$, $\Lambda_L$ kwadratem o boku $L$ ze środkiem w początku układu współrzędnych.

$$\Omega^X_{\Lambda_L} = \{Y \in \Omega, Y(\Lambda^c_L) = X(\Lambda^c_L)\}$$

$$\rho^X_{T,\Lambda_L}(Y) = \frac{e^{-\frac{H(Y|X)}{T}}}{\sum_{Z\in\Omega^X_{\Lambda_L}} e^{-\frac{H(Z|X)}{T}}}$$

jest miarą Gibbsa w skończonej objętości.

Można pokazać istnienie granicy termodynamicznej (ze słabą z gwiazdką zbieżności miar) $\rho^X_{T,\Lambda_L} \to^{L\to\infty} \rho^X_T$.
Chcielibyśmy udowodnić, że $\rho^X_T(Y \in \Omega, Y(0) \neq X(0)) > 1 - \varepsilon(T)$, gdzie $\varepsilon(T) \to 0$ $gdy$ $T \to 0$.

$\rho^X_T$ byłaby wtedy nieokresową miarą Gibbsa, małym zaburzeniem nieokresowej konfiguracji stanu podstawowego $X$. Aby to udowodnić dla nieokresowych miar spełniających pewne warunki, na przykład szybką zbieżność do częstości występowania lokalnych konfiguracji, będziemy posługiwać się rozwinięciami niskotemperaturowymi [26].

**5. Uzasadnienie wyboru wiodącego partnera zagranicznego i celowości współpracy międzynarodowej**

Wiodącym partnerem zagranicznym w projekcie jest Aernout van Enter z Uniwersytetu w Groningen w Holandii. Współpracowaliśmy przez wiele lat badając matematyczne modele kwazikryształów. Opublikowaliśmy 5 prac, niektóre uzyskane wyniki zostały powyżej omówione. Spotkaliśmy się ostatnio kilka razy na matematycznych konferencjach kwazikrystalicznych, nakreśliliśmy zadania badawcze w oparciu o obecny stan wiedzy. Van Enter jest fizykiem matematycznym, specjalistą od własności spektralnych struktur nieokresowych oraz miar Gibbsa i przejść fazowych. Udział van Entera będzie istotny we wszystkich zadaniach badawczych.

Z drugim partnerem zagranicznym, Markiem Biskupem z UCLA, pracowałem w przeszłości nad konstrukcją nieokresowych miar Gibbsa dla skończenie-zasięgowych oddziaływań. Podczas mojej wizyty w UCLA rok temu powróciliśmy do tego projektu. Biskup jest probabilistą, specjalistą w matematycznej mechanice statystycznej, w szczególności w rozwinięciach klastrowych bardzo przydatnych w dowodach istnienia przejść fazowych. Jego obecność w projekcie jest w szczególny sposób istotna w drugim i trzecim zadaniu badawczym.

W naszych pracach badawczych będzie uczestniczył również Siamak Taati z University of British Columbia w Vancouver. Jest on specjalistą od automatów komórkowych. Jego udział w projekcie będzie niezwykle istotny w dwóch ostatnich zadaniach badawczych, a zwłaszcza w konstrukcji miar Gibbsa w automatach komórkowych.

## Literatura


[1] G. E. Uhlenbeck, Statistical Mechanics; Foundations and Applications, ed. T. A. Bak, p. 581 (New York: Benjamin, 1967).

[2] J. Miękisz, Quasicrystals - Microscopic Models of Nonperiodic Structures (Leuven Lecture Notes in Mathematical and Theoretical Physics, Vol. 5, Leuven University Press, 1993).

[3] A. C. D. van Enter, Aperiodicity in equilibrium systems: between order and disorder. Acta Physica Polonica A 126: 621-624 (2014).

[4] D. Schechtman, I. Blech, D. Gratias, and J. W. Cahn, Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry, Phys. Rev. Lett. 53: 1951 (1984).

[5] P. Gács, Reliable cellular automata with self-organization, J. Stat. Phys. 103: 45Ő267 (2001).

[6] S. Goldstein, R. Kuik, J. L. Lebowitz, and C. Maes, From PCAs to equilibrium systems and back, Commun. Math. Phys. 125: 71-79 (1989).

[7] R. Berger, The undecidability of the domino problem, Memoirs of the American Mathematical Society 66: 72 (1966).

[8] E. Jeandel and M. Rao, An aperiodic set of 11 Wang tiles, arXiv:1506.06492 (2015).

[9] J. Miękisz, Classical lattice-gas models of quasicrystals, J. Stat. Phys. 97: 835-850 (1999).

[10] J. Aliste-Prieto, D. Coronel, and J.-M. Gambaudo, Rapid convergence to frequency for substitution tilings of the plane, Commun. Math. Phys. 306: 365-380 (2011).

[11] B. Durand, A. Romashchenko, and A. Schen, Fixed-point sets and their applications, J. Comp. and System Sciences 78: 731-764 (2012).

[12] M. Keane, Generalized Morse sequences, Zeit. Wahr. 10: 3-35 (1968).

[13] C. Gardner, J. Miękisz, C. Radin, and A. C. D. van Enter. Fractal symmetry in an Ising model, J. Phys. A, Math. Gen. 22: L1019 (1989).

[14] C. Radin, Crystals and quasicrystals: a lattice gas model, Phys. Lett. A 114: 381 (1986).

[15] J. Miękisz, How low temperature causes long-range order, J. Phys. A: Math. Gen. 21: L529-L531 (1988).

[16] J. Miękisz and C. Radin, Why solids are not really crystalline? Phys. Rev. B 39: 1950-1952 (1989).

[17] J. Miękisz, A microscopic model with quasicrystalline properties, J. Stat. Phys. 58: 1137 (1990).

[18] J. Miękisz, Many phases in systems without periodic ground states, Commun. Math. Phys. 107: 577 (1986).

[19] A. C. D. van Enter and J. Miękisz, Breaking of periodicity at positive temperatures, Commun. Math. Phys. 134:647 (1990).

[20] A. C. D. van Enter, J. Miękisz, and M. Zahradnik, Nonperiodic long-range order for fast-decaying interactions at positive temperatures, J. Stat. Phys. 90:1441 (1998).

[21] A. C. D. van Enter and J. Miękisz, How should one define a (weak) crystal? J. Stat. Phys. 66: 1147 (1992).

[22] A. C. D. van Enter and E. de Groote, An ultrametric state space with a dense discrete overlap distribution: paperfolding sequences, J. Stat. Phys. 142: 223-228 (2011).

[23] M. Baake, D. Lenz, and A. C. D. van Enter, Dynamical versus diffraction spectrum for structures with finite local complexity Ergodic Theory and Dynamical Systems 35: 2017-2043 (2015).

[24] A C D van Enter, A Hof, and J. Miękisz, Overlap distributions for deterministic systems with many pure states, J. Phys. A Math. Gen. 25: L1133-Ll137 (1992).

[25] J. Jędrzejewski and J. Miękisz, Ground states of lattice gases with “almost” convex repulsive interactions, J. Stat. Phys. 98: 589-620 (2000).

[26] S. A. Pirogov, and Ya. G. Sinai, Phase diagrams of classical lattice systems, Teor. Mat. Fiz. 25: 358-369 (1975).