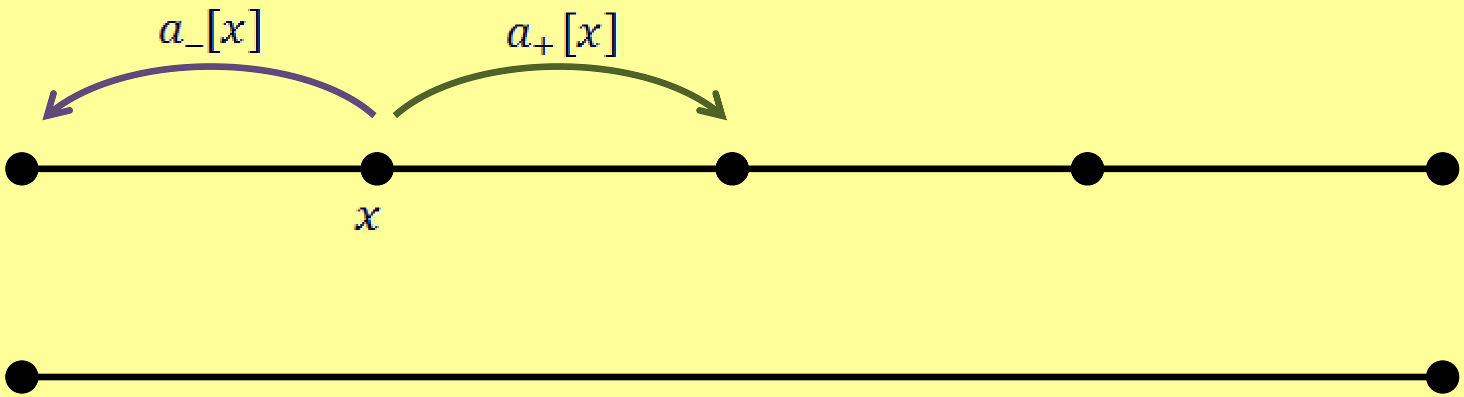
Zasada średniego potencjału

w grach ewolucyjnych

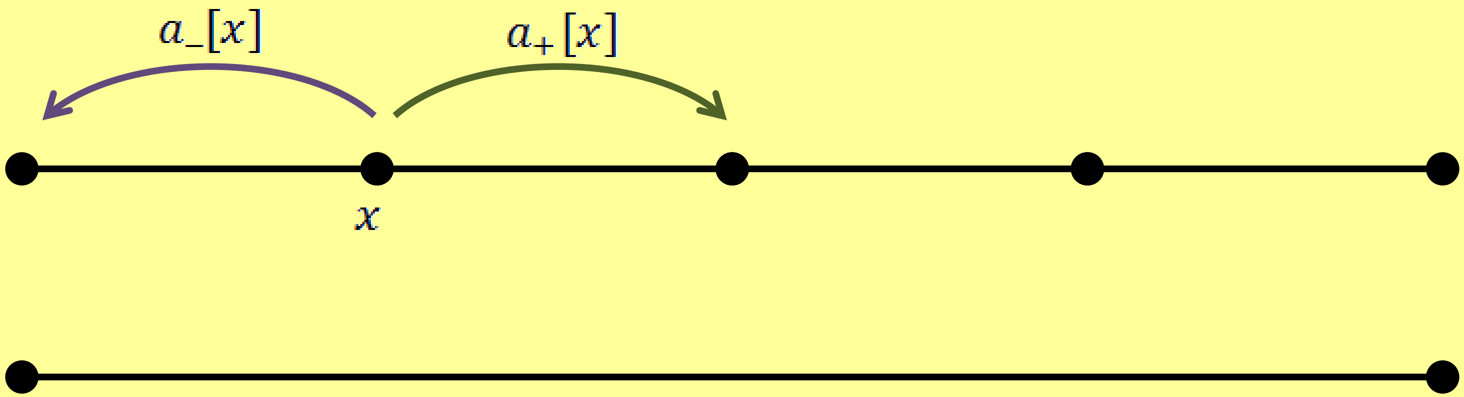
Paweł Nałęcz-Jawecki

O czym będzie ten komunikat



$$dX_t = a(X_t)\,dt + b(X_t)\,dW_t$$

O czym będzie ten komunikat

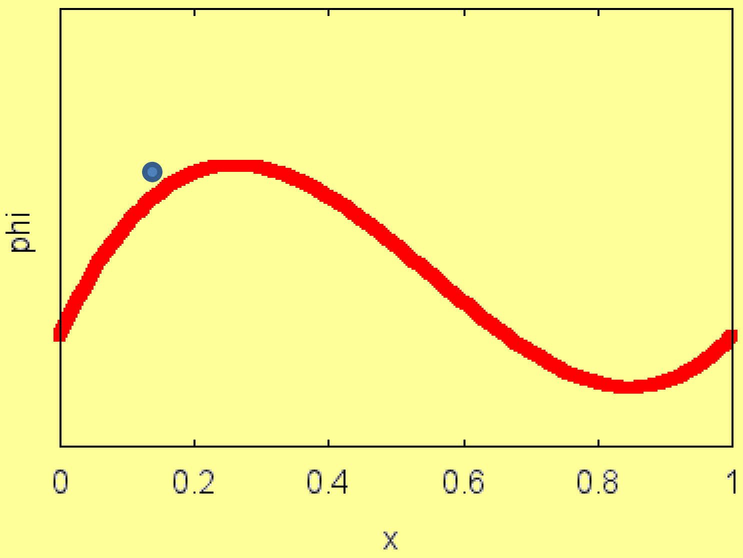


$$dX_t = a(X_t)\,dt + b(X_t)\,dW_t$$

- Jak powiązać procesy błądzenia losowego na dyskretnym grafie ze (stochastycznymi lub nie) równaniami różniczkowymi?
- Co wtedy „od razu widać”?

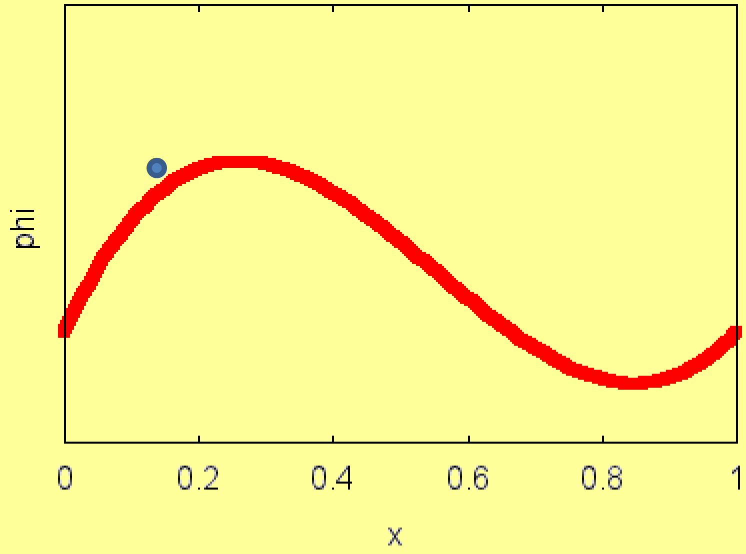
O czym będzie ten komunikat

- I dlaczego warto czasami narysować wykres



Funkcja potencjału

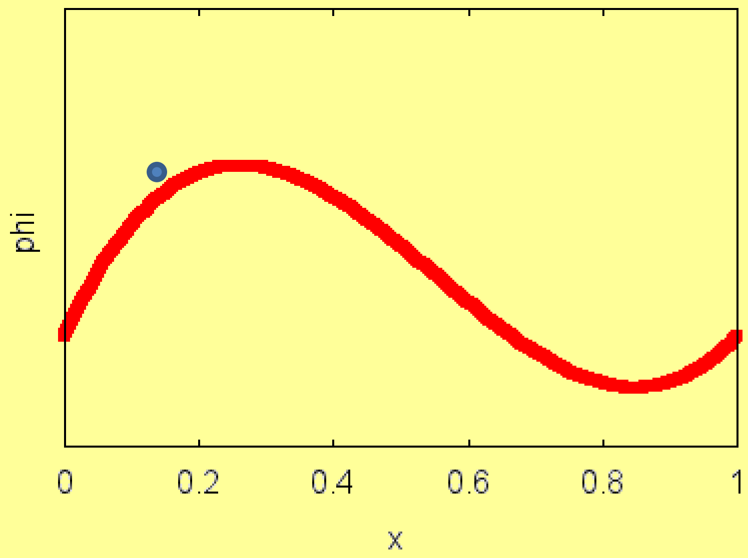
$$dX_t = \mu\, dt + dW$$



Funkcja potencjału

$$dX_t = \mu \, dt + dW$$

$$dX_t = \mu[X_t] \, dt + dW$$

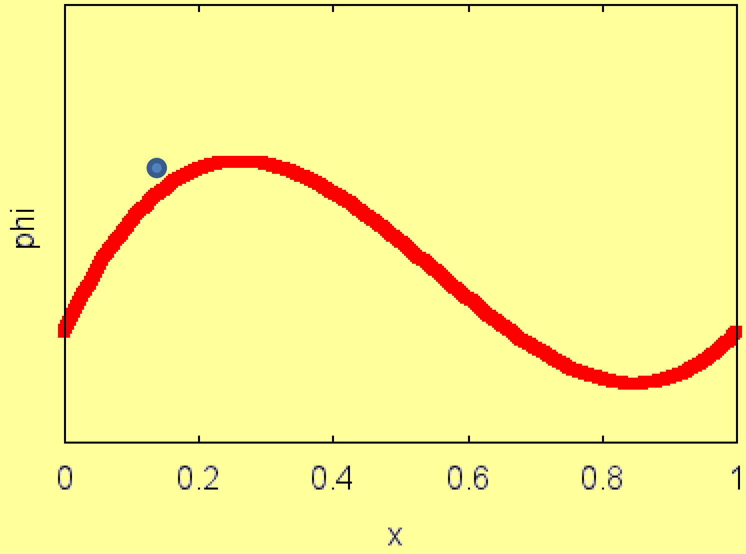


Funkcja potencjału

$$dX_t = \mu \, dt + dW$$

$$dX_t = \mu[X_t] \, dt + dW$$

$$dX_t = -\nabla\varphi \, dt + dW$$

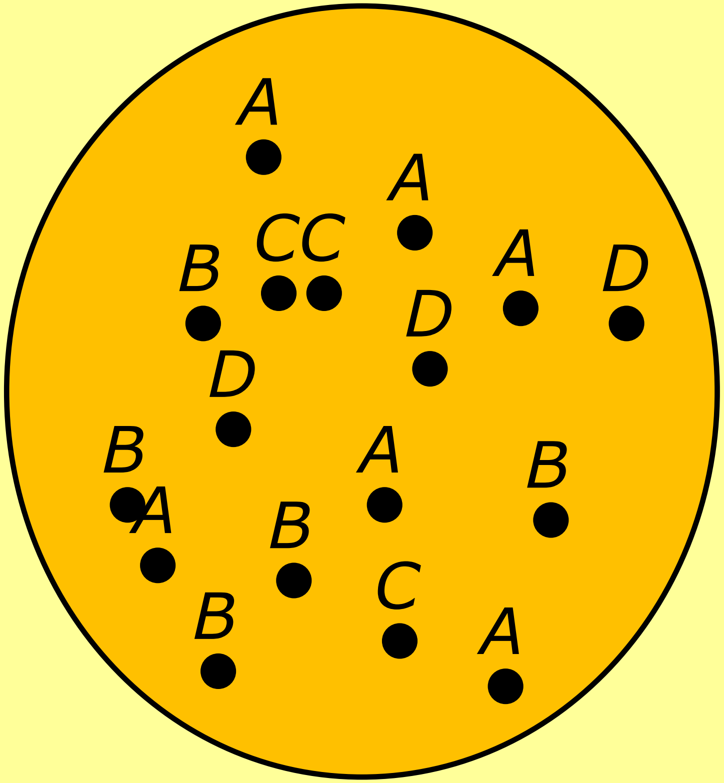


Motywacja

- Gra ewolucyjna

Motywacja

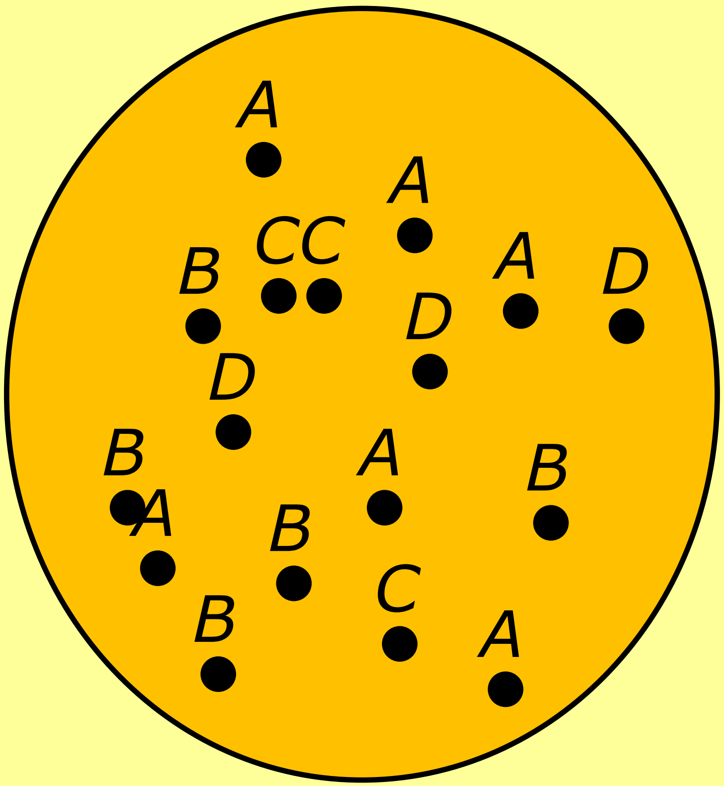
- Gra ewolucyjna



- Mamy pewną populację graczy

Motywacja

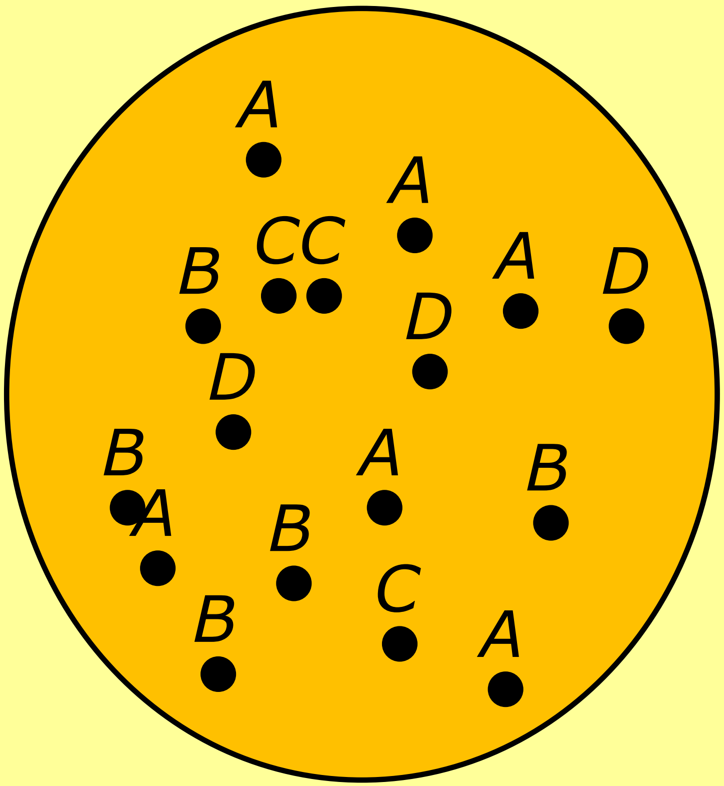
- Gra ewolucyjna



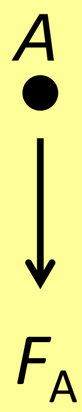
- Mamy pewną populację graczy
- Każdy gracz posiada pewną strategię

Motywacja

- Gra ewolucyjna



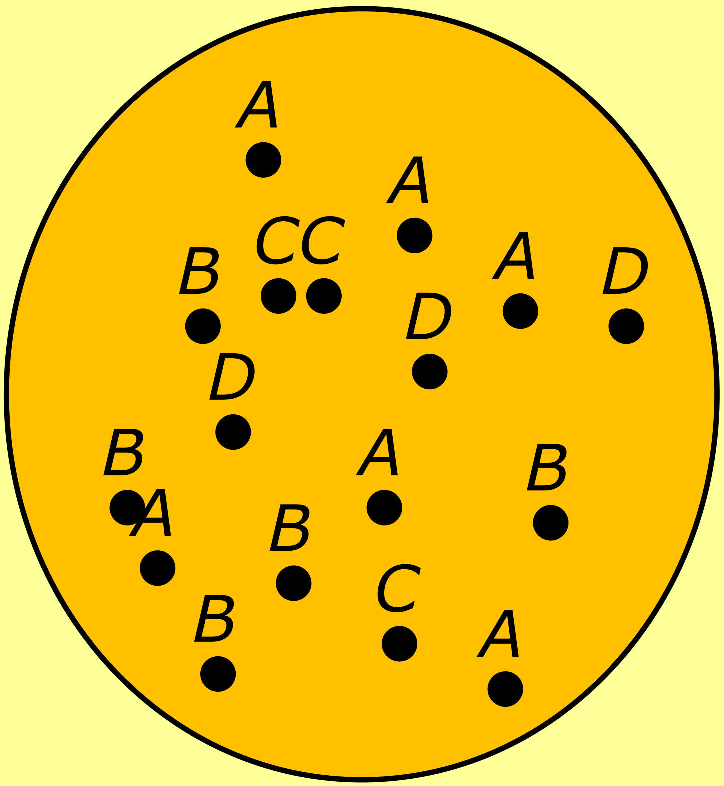
- Mamy pewną populację graczy
- Każdy gracz posiada pewną strategię



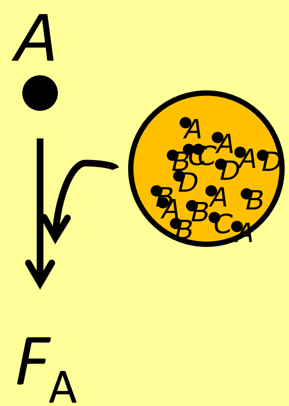
- Ta strategia determinuje kondycję (*fitness*) danego gracza

Motywacja

- Gra ewolucyjna



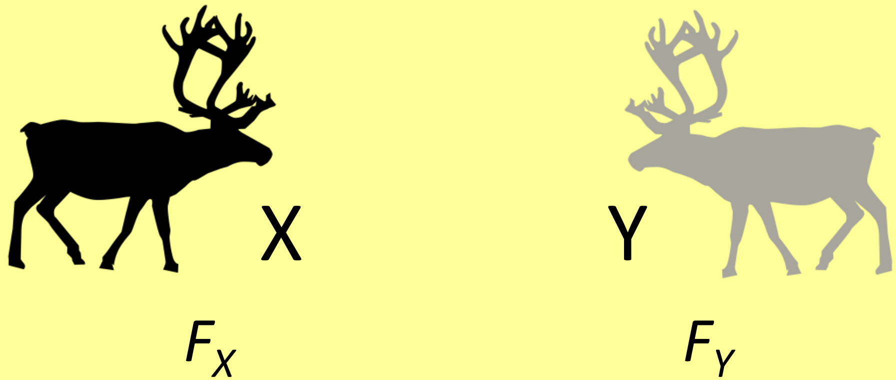
- Mamy pewną populację graczy
- Każdy gracz posiada pewną strategię



- Ta strategia determinuje kondycję (*fitness*) danego gracza
- W zależności od tego jak grają inni

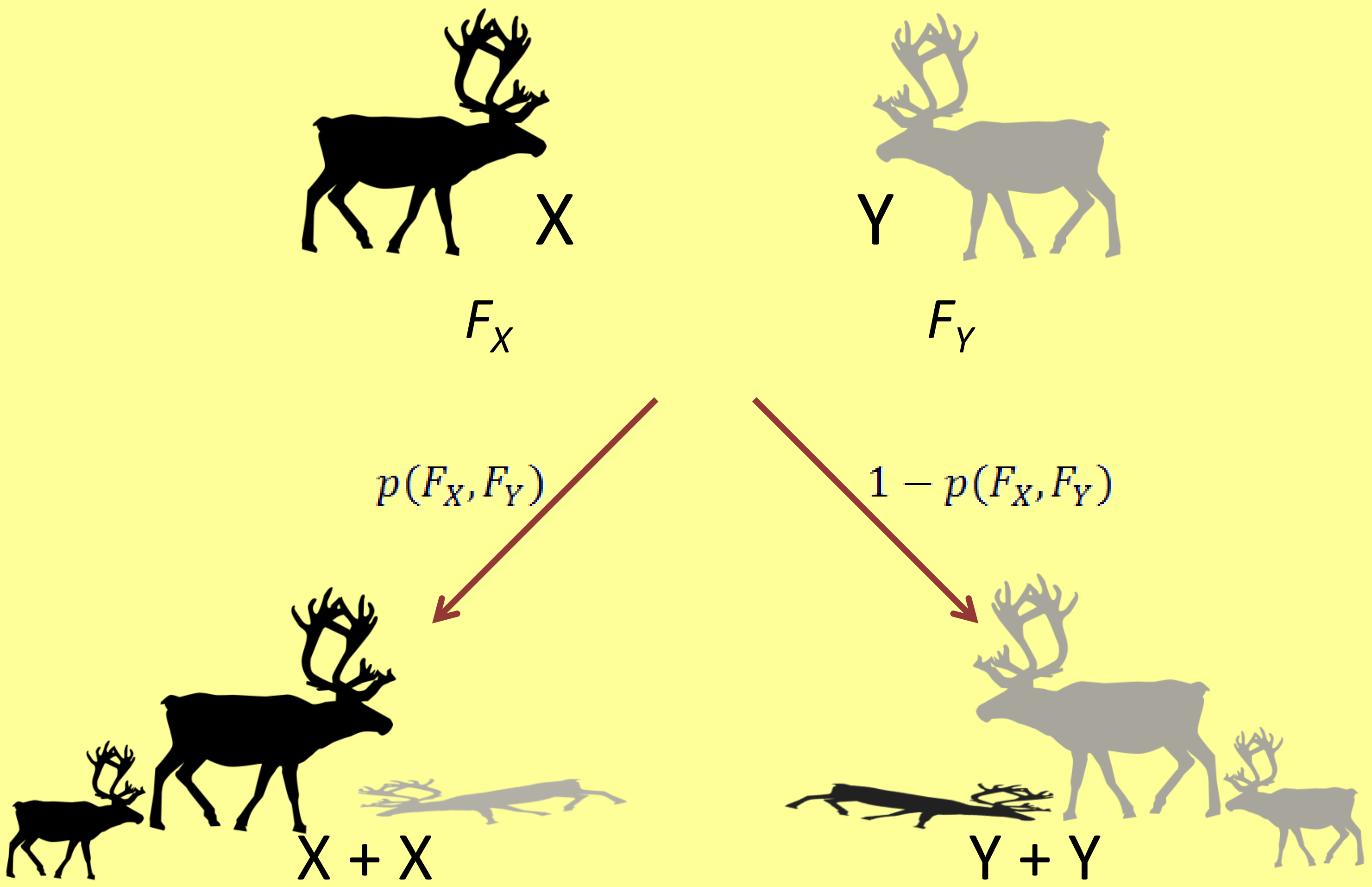
John Maynard Smith
Greorge R. Price

Motywacja



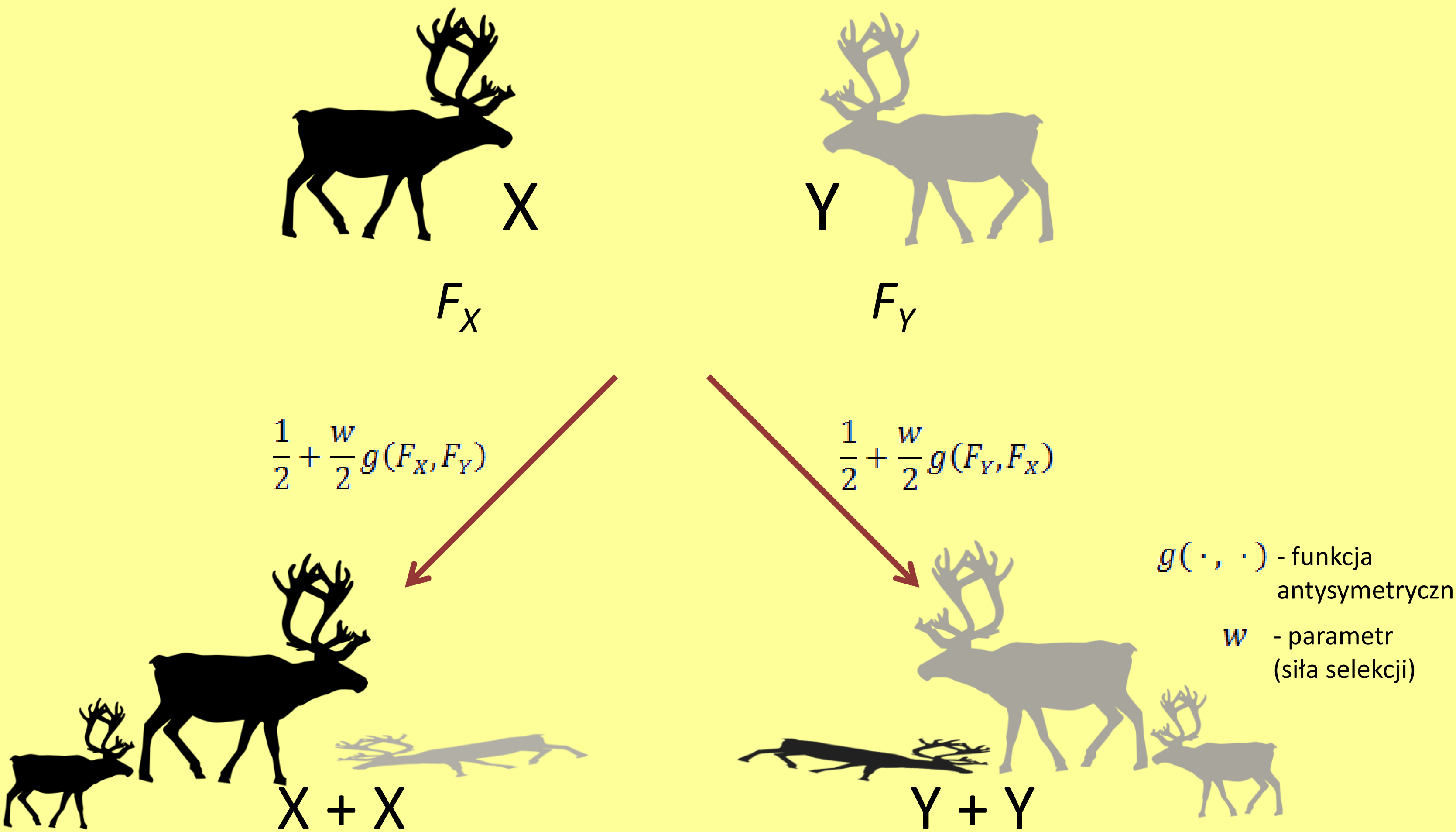
Motywacja

John Maynard Smith
Greorge R. Price



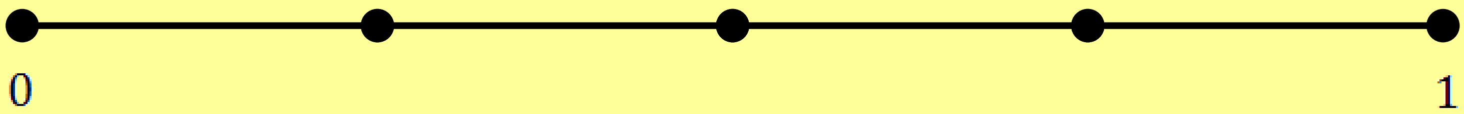
Motywacja

John Maynard Smith
Greorge R. Price



Proces dyskretny

- Liczba graczy ***N*** jest stała

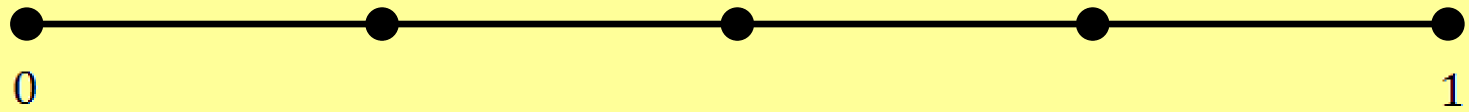


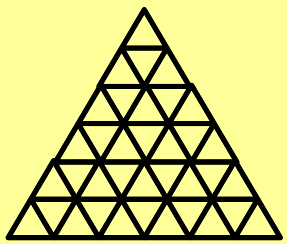
wszyscy grają ***B***

wszyscy grają ***A***

Proces dyskretny

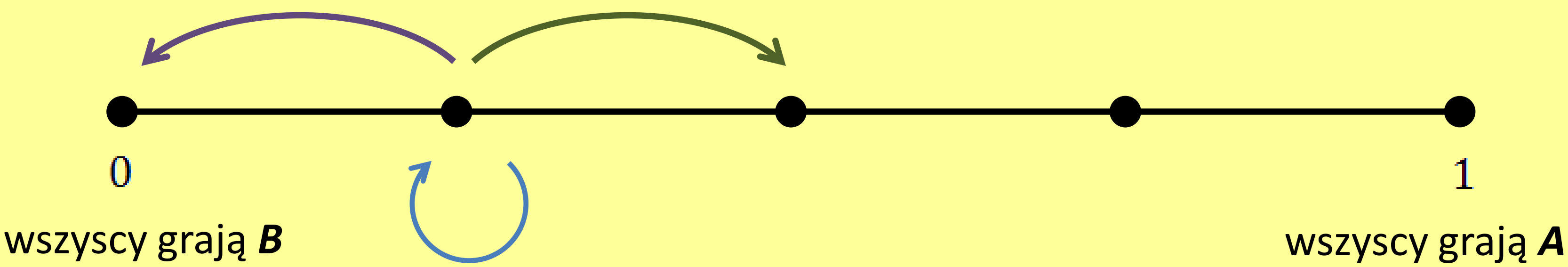
- Liczba graczy ***N*** jest stała





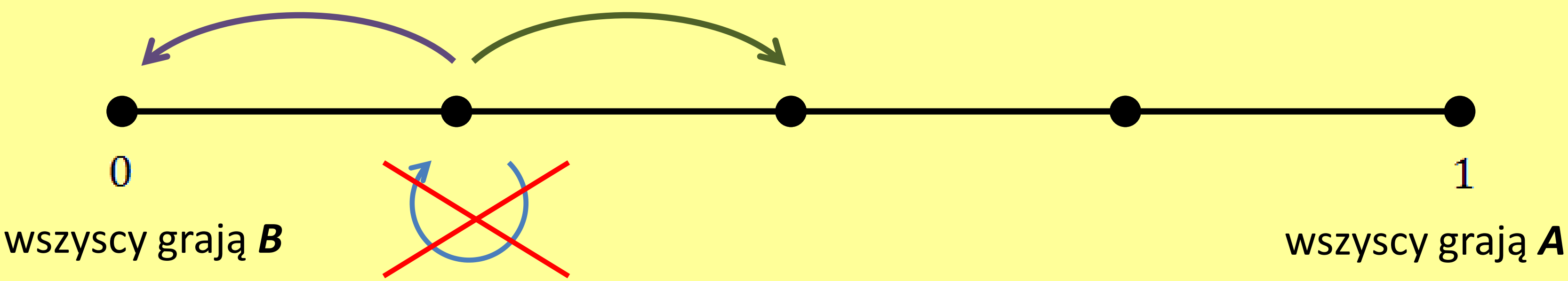
Proces dyskretny

- Liczba graczy ***N*** jest stała



Proces dyskretny

- Liczba graczy ***N*** jest stała



Pytania

- **Co się stanie, jeśli w populacji zdominowanej przez osobniki *B* pojawi się jeden (mała grupa) mutantów typu *A*?**
- Jaka jest szansa, że nowy fenotyp całkowicie wyprze stary? Czy selekcja będzie w tym pomagać czy przeszkadzać?
- Czy możliwa jest w miarę stabilna koegzystencja?

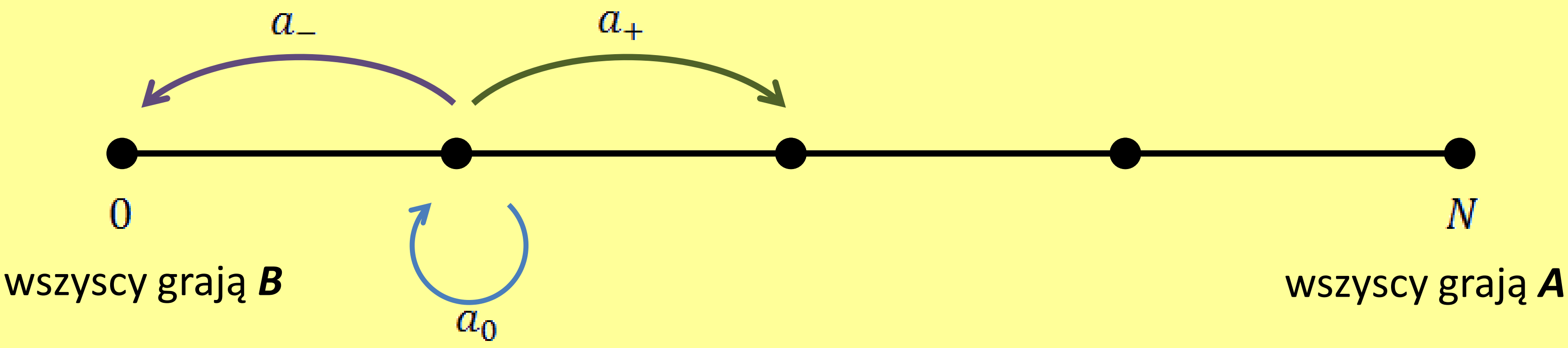
- **Która strategia wyginie?**
  (w zależności od stanu początkowego)
- Kiedy się to stanie?

Pytania

- Co się stanie, jeśli w populacji zdominowanej przez osobniki ***B*** pojawi się jeden/mała grupa mutantów typu ***A***?
- Jaka jest szansa, że nowy fenotyp całkowicie wyprze stary? Czy selekcja będzie w tym pomagać czy przeszkadzać?
- Czy możliwa jest w miarę stabilna koegzystencja?

- Która strategia wyginie?
  (w zależności od stanu początkowego)
- Kiedy się to stanie?

Proces dyskretny



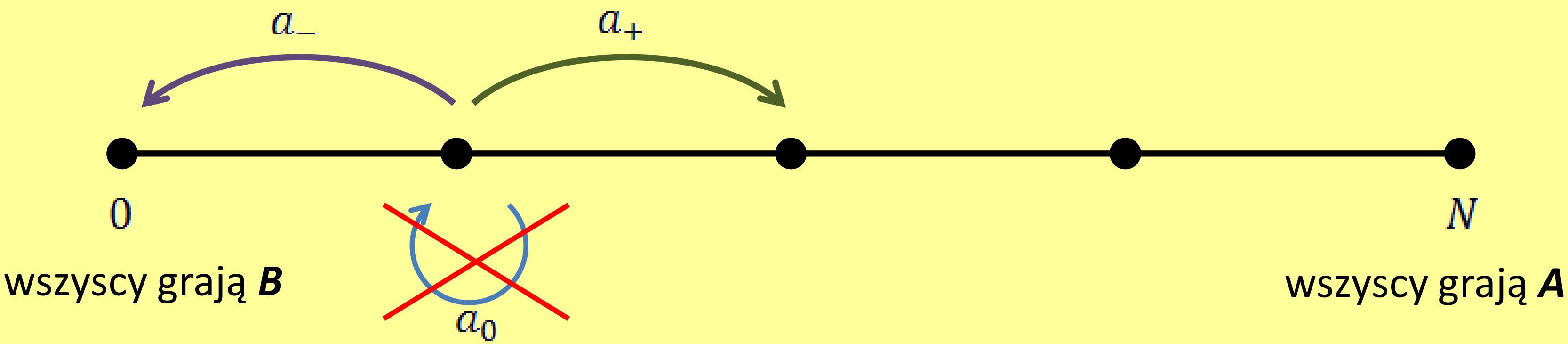
$$a_+[x] = x(1-x)\left(\frac{1}{2} + \frac{w}{2} g\big[F_A[x], F_B[x]\big]\right)$$

$$a_-[x] = x(1-x)\left(\frac{1}{2} - \frac{w}{2} g\big[F_A[x], F_B[x]\big]\right)$$

$$a_0[x] = x^2 + (1-x)^2$$

$$x = \frac{liczba\ osobników\ grających\ A}{liczba\ wszystkich\ graczy}$$

Proces dyskretny



$$a_+[x] = \cancel{x(1-x)}\left(\frac{1}{2} + \frac{w}{2}\, g\big[F_A[x], F_B[x]\big]\right)$$

$$a_-[x] = \cancel{x(1-x)}\left(\frac{1}{2} - \frac{w}{2}\, g\big[F_A[x], F_B[x]\big]\right)$$

$$\cancel{a_0[x] = x^2 + (1-x)^2}$$

$$x = \frac{\textit{liczba osobników grających } A}{\textit{liczba wszystkich graczy}}$$

Rozwiązania dokładne

$$\rho_A[x] = a_+[x]\rho_A\left[x + \frac{1}{N}\right] + a_-[x]\rho_A\left[x - \frac{1}{N}\right]$$

$$\rho_A[x] = \frac{\sum_{l=1}^{xN} \prod_{k=1}^{l-1} \frac{a_-[\frac{k}{N}]}{a_+[\frac{k}{N}]}}{\sum_{l=1}^{N} \prod_{k=1}^{l-1} \frac{a_-[\frac{k}{N}]}{a_+[\frac{k}{N}]}}$$

Równanie Masters i dualne do niego

Przybliżenie procesem ciągłym

- *liczba kroków na jednostkę czasu ~* ***N***

$$\boldsymbol{E}\,(X_{n+1} - X_n) = \frac{2}{N}(a_+ - a_-) = \frac{2}{N} wg = 2wg\,\Delta t$$

$$\boldsymbol{Var}\,(X_{n+1} - X_n) = \frac{1}{N^2} a_+ a_- = \frac{\Delta t}{N} \cdot (1 - w^2 g^2)$$

$$a_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{w}{2} g$$

$$g = g(F_A[x], F_B[x])$$

Przybliżenie procesem ciągłym

- *liczba kroków na jednostkę czasu ~* ***N***

$$\boldsymbol{E}\,(X_{n+1} - X_n) = \frac{2}{N}(a_+ - a_-) = \frac{2}{N} wg = 2wg\,\Delta t$$

$$\boldsymbol{Var}\,(X_{n+1} - X_n) = \frac{1}{N^2} a_+ a_- = \frac{\Delta t}{N} \cdot (1 - w^2 g^2)$$

$$dX_t = 2wg\,dt + \frac{1}{N} dW$$

$$a_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{w}{2} g$$

$$g = g(F_A[x], F_B[x])$$

Arne Traulsen
(2006 i później)

Przybliżenie procesem ciągłym

- *liczba kroków na jednostkę czasu ~* ***N***

$$\boldsymbol{E}\,(X_{n+1} - X_n) = \frac{2}{N}(a_+ - a_-) = \frac{2}{N}wg = 2wg\;\Delta t$$

$$\boldsymbol{Var}\,(X_{n+1} - X_n) = \frac{1}{N^2}a_+a_- = \frac{\Delta t}{N}\cdot(1 - w^2g^2)$$

$$dX_t = 2wg\;dt + \frac{1}{N}dW$$

$$a_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{w}{2}g$$

$$g = g(F_A[x], F_B[x])$$

Arne Traulsen
(2006 i później)

Równanie replikatorowe
(deterministyczne)

Błądzenie losowe
(bez dryfu)

Martin Nowak (2004)

Przykład

- Gracze to wilki polujące na zwierzynę
- Na łowy wyruszają parami
- Żeby upolować jelenia, oba osobniki muszą współpracować

Przykład

- Gracze to wilki polujące na zwierzynę
- Na łowy wyruszają parami
- Żeby upolować jelenia, oba osobniki muszą współpracować

- **A:** lojalnie współpracuję -> jeśli partner nie zawiedzie, dostanę dużo
- **B:** idę polować na owce -> dostanę mało, ale na pewno

Gra typu jeleń-zając

Przykład

- **A:** lojalnie współpracuję -> jeśli partner nie zawiedzie, dostanę dużo
- **B:** idę polować na owce -> dostanę mało, ale na pewno

Gra typu jeleń-zając

Przykład

- **A:** lojalnie współpracuję -> jeśli partner nie zawiedzie, dostanę dużo
- **B:** idę polować na owce -> dostanę mało, ale na pewno

- Jeśli większość graczy gra **A**, gracze **A** są bardziej syci niż gracze **B** ($F_A > F_B$)

Gra typu jeleń-zając

Przykład

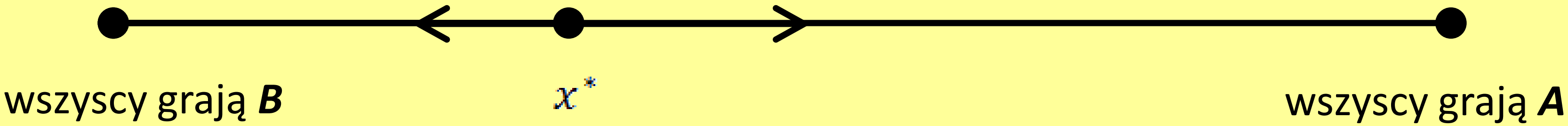
- **A:** lojalnie współpracuję -> jeśli partner nie zawiedzie, dostanę dużo
- **B:** idę polować na owce -> dostanę mało, ale na pewno

- Jeśli większość graczy gra **A**, gracze **A** są bardziej syci niż gracze **B** ($F_A > F_B$)
- Jeśli większość graczy gra **B**, gracze **B** są bardziej syci niż gracze **A** ($F_A < F_B$)

Gra typu jeleń-zając

Przykład

- Deterministycznie:



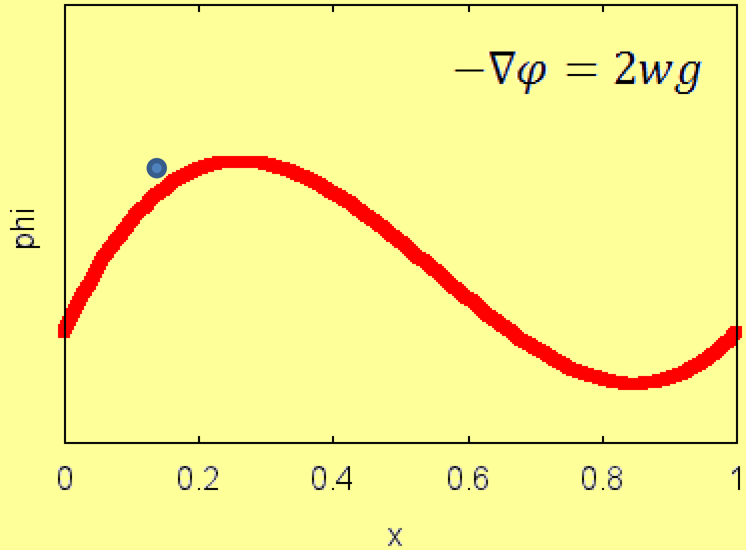
Strategie ewolucyjnie stabilne

- Czy selekcja pomaga w utrzymaniu status-quo?

Def. Strategię **B** nazwiemy, *ewolucyjnie stabilną,* jeśli w przypadku najechania populacji, w której wszyscy grają **B,** przez nieliczną grupę osobników grających dowolną inną strategią:
(i) najeźdźcy mają gorszą kondycję niż osobniki **B** (Maynard Smith)
(ii) szansa, że najeźdźcy całkowicie wyprą graczy **B** jest mniejsza niż w przypadku nie działania selekcji (Nowak)

Przybliżenie procesem ciągłym

$$dX_t = 2wg\ dt + \frac{1}{N} dW$$



Przykład

- **A:** lojalnie współpracuję -> jeśli partner nie zawiedzie, dostanę dużo
- **B:** idę polować na owce -> dostanę mało, ale na pewno

- Jeśli większość graczy gra **A**, gracze **A** są bardziej syci niż gracze **B** ($F_{\mathrm{A}} > F_{\mathrm{B}}$)
- Jeśli większość graczy gra **B**, gracze **B** są bardziej syci niż gracze **A** ($F_{\mathrm{A}} < F_{\mathrm{B}}$)

$$F_A[x] = c \cdot x$$
$$F_B[x] = d = const$$

Gra typu jeleń-zając

Przykład

- **A:** lojalnie współpracuję -> jeśli partner nie zawiedzie, dostanę dużo
- **B:** idę polować na owce -> dostanę mało, ale na pewno

- Jeśli większość graczy gra **A**, gracze **A** są bardziej syci niż gracze **B** ($F_{\mathrm{A}} > F_{\mathrm{B}}$)
- Jeśli większość graczy gra **B**, gracze **B** są bardziej syci niż gracze **A** ($F_{\mathrm{A}} < F_{\mathrm{B}}$)

$$F_A[x] = c \cdot x$$

$$F_B[x] = d = const$$

$$F_A[x] - F_B[x] \sim (x - x^*)$$

x^* - niestabilna równowaga Nasha

Gra typu jeleń-zając

Przykład

- Załóżmy, że szansa na wygranie pojedynku o samicę zależy liniowo od różnicy kondycji

$$g(F_A, F_B) \sim F_A - F_B$$

Przykład

- Załóżmy, że szansa na wygranie pojedynku o samicę zależy liniowo od różnicy kondycji

$$g(F_A, F_B) \sim F_A - F_B$$

$$g(F_A, F_B) \sim F_A - F_B \sim (x - x^*)$$

Przykład

- Załóżmy, że szansa na wygranie pojedynku o samicę zależy liniowo od różnicy kondycji

$$g(F_A, F_B) \sim F_A - F_B$$

$$g(F_A, F_B) \sim F_A - F_B \sim (x - x^*)$$

$$\varphi \sim (x - x^*)^2$$

$$\varphi = -\frac{1}{2} w (x - x^*)^2$$

Przykład

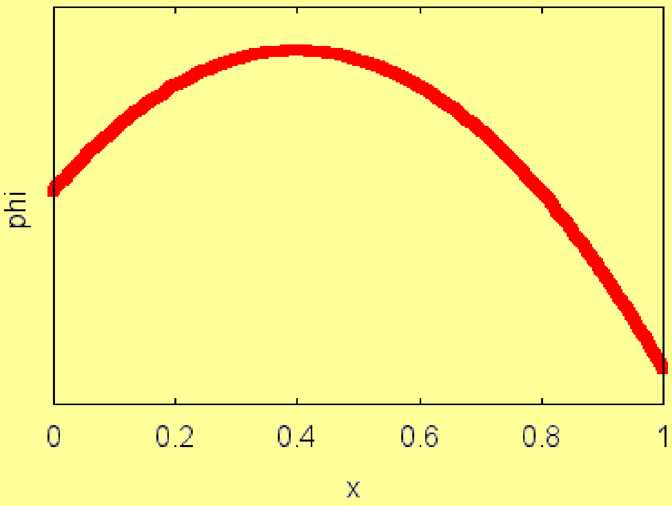
- Załóżmy, że szansa na wygranie pojedynku o samicę zależy liniowo od różnicy kondycji

$$g(F_A, F_B) \sim F_A - F_B$$

$$g(F_A, F_B) \sim F_A - F_B \sim (x - x^*)$$

$$\varphi \sim (x - x^*)^2$$

$$\varphi = -\frac{1}{2} w (x - x^*)^2$$



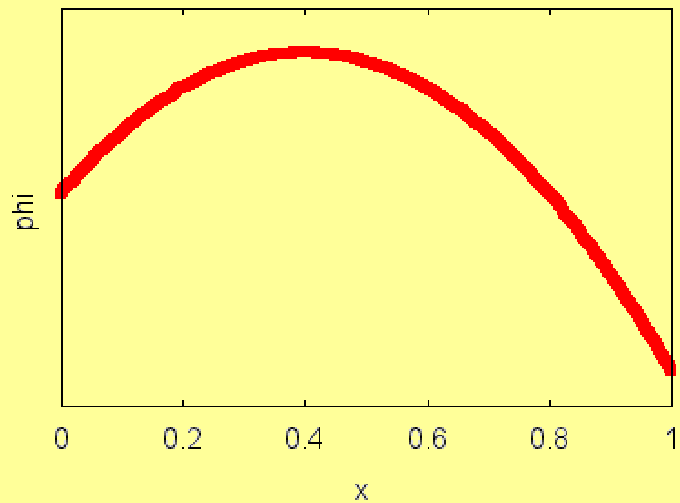
Strategie ewolucyjnie stabilne

- Czy selekcja pomaga w utrzymaniu status-quo?

Def. Strategię **B** nazwiemy, *ewolucyjnie stabilną,* jeśli w przypadku najechania populacji, w której wszyscy grają **B,** przez nieliczną grupę osobników grających dowolną inną strategią:
(i) najeźdźcy mają gorszą kondycję niż osobniki **B** (Maynard Smith)
(ii) szansa, że najeźdźcy całkowicie wyprą graczy **B** jest mniejsza niż w przypadku nie działania selekcji (Nowak)

Zasada średniego potencjału

- (i) zachodzi, gdy w ***x*** = 0 potencjał ma lokalne minimum
- (ii) zachodzi (dla ***w*** -> 0), gdy potencjał w ***x*** = 0 jest mniejszy niż średni potencjał na całym odcinku
- (ii)* zachodzi dla konkretnego ***w,*** gdy wartość e^{φ} jest mniejsza w punkcie ***x*** = 0 niż średnio na całym odcinku



Zasada średniego potencjału

- Dla jakich ***x**** strategia ***B*** jest stabilna?

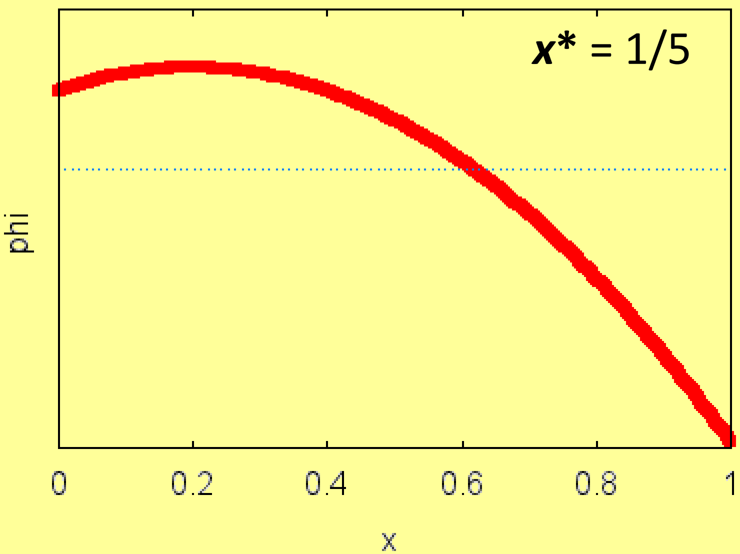
Zasada średniego potencjału

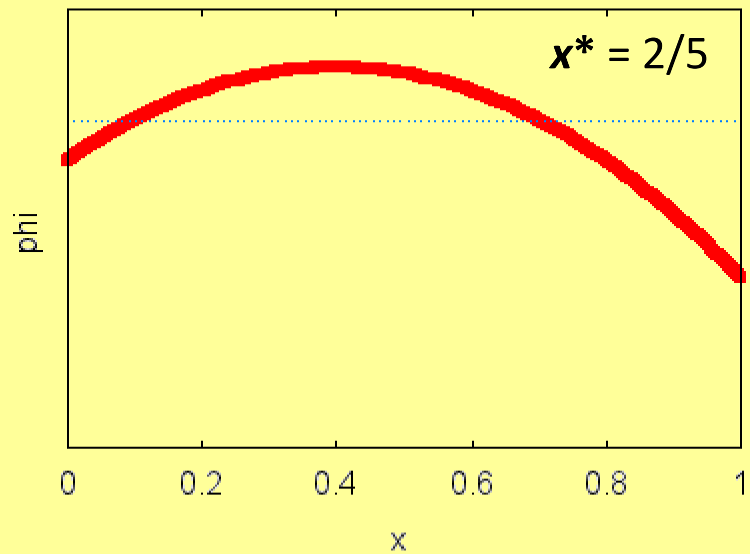
- Dla jakich ***x**** strategia ***B*** jest stabilna?
- Warunek (i) jest spełniony zawsze
- Wystarczy sprawdzić, kiedy średni potencjał jest potencjału w zerze
- Ponieważ $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{x}^*}[\boldsymbol{x}]$ jest prostą funkcją (wielomianem 2 stopnia) zmiennej (***x***-***x****), więc warunek

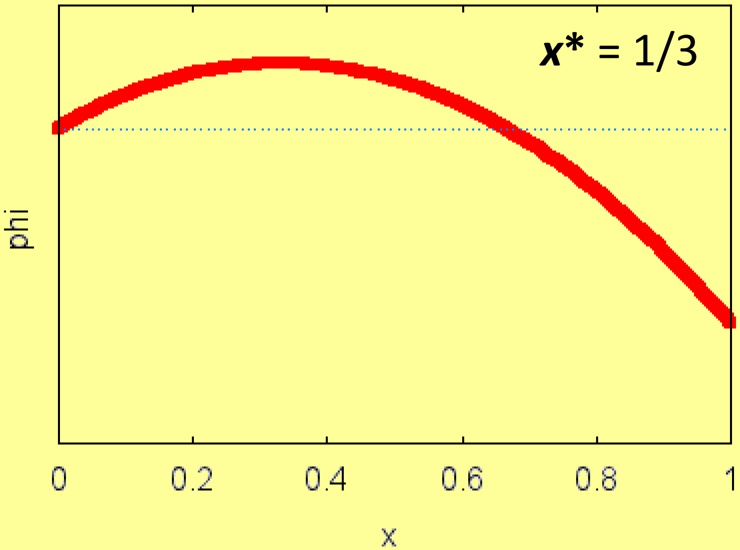
$$\varphi_{x^*}[0] = \int_0^1 \varphi_{x^*}[x] dx$$

  generuje proste równanie na krytyczną wartość ***x****
- Okazuje się, że strategia ***B*** jest stabilna dla ***x****>**1/3**

Zasada średniego potencjału







Kuleczka i pionek

- To było tylko (dobre) przybliżenie
- Czy możemy znaleźć proces ciągły, który **dokładnie** odpowiada procesowi dyskretnemu?

Przybliżenie procesem ciągłym

- *liczba kroków na jednostkę czasu ~* ***N***

$$\boldsymbol{E}\,(X_{n+1} - X_n) = \frac{2}{N}(a_+ - a_-) = \frac{2}{N}wg = 2wg\,\Delta t$$

$$\boldsymbol{Var}\,(X_{n+1} - X_n) = \frac{1}{N^2}a_+a_- = \frac{\Delta t}{N}\cdot(1 - w^2g^2)$$

$$dX_t = 2wg\;dt + \frac{1}{N}dW$$

$$a_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{w}{2}g$$

$$g = g(F_A[x], F_B[x])$$

Arne Traulsen
(2006 i później)

Równanie replikatorowe
(deterministyczne)

Błądzenie losowe
(bez dryfu)

Martin Nowak (2004)

Kuleczka i pionek

- Dla procesu ciągłego szansa dotarcia do ***x***+**1**/***N*** wcześniej niż do ***x***-**1**/***N*** pod warunkiem zaczynania z ***x*** wynosi

$$\frac{\int_{-\frac{1}{N}}^{0} e^{\varphi[x+y]}dy}{\int_{-\frac{1}{N}}^{\frac{1}{N}} e^{\varphi[x+y]}dy}$$

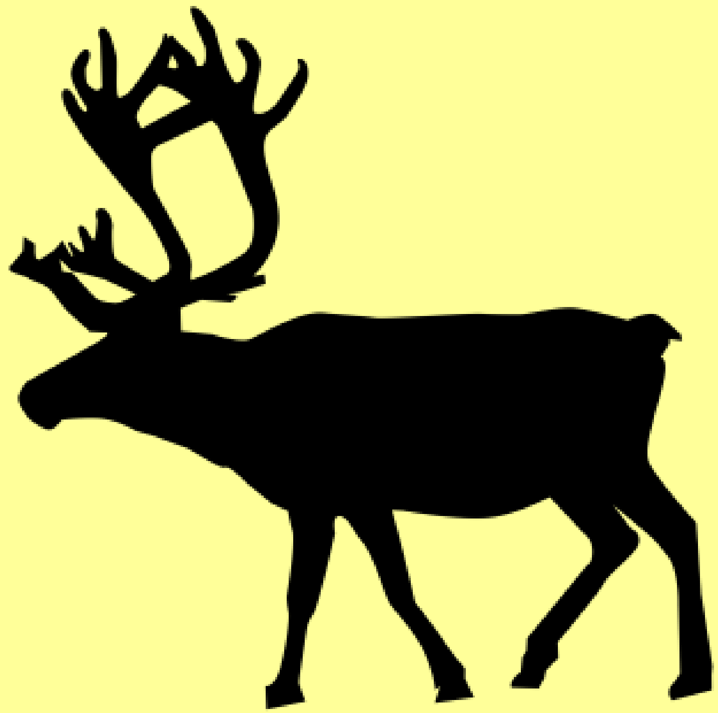
Kuleczka i pionek

- Dla procesu ciągłego szansa dotarcia do ***x*****+1/*****N*** wcześniej niż do ***x*****-1/*****N*** pod warunkiem zaczynania z ***x*** wynosi

$$a_+[x] = \frac{\int_{-\frac{1}{N}}^{0} e^{\varphi[x+y]} dy}{\int_{-\frac{1}{N}}^{\frac{1}{N}} e^{\varphi[x+y]} dy}$$

- Możemy wziąć dowolne $\boldsymbol{\varphi}$, np. kawałkami liniowe, spełniające powyższą zależność

Dziękuję za uwagę



Paweł Nałęcz-Jawecki

Jacek Miękisz
Kajetan Muszyński

MISMaP

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski