Jest nas czworo przyjaciół z liceum: fizyczka, informatyk, kafelkarz i ja – matematyk nadzorujący całe przedsięwzięcie. Spotykamy się nieregularnie, rzekłbym nieokresowo, w pewnym staromiejskim pubie irlandzkim, gdzie popijamy guinnessa, dyskutujemy o nieskończoności i regularności Natury, ale przede wszystkim przeprowadzamy różne obliczenia, na serwetkach oczywiście. Naszym celem jest pobicie rekordu świata.

> JACEK MIĘKISZ

PROBLEM KRYSZTAŁU

...z punktu widzenia kafelkarza

WSZYSTKO zaczęło się od tego, że kolega kafelkarz znudził się układaniem na balkonach i tarasach jedynie kwadratowych kafelków. Chciał używać bardziej wymyślnych kształtów. Poprosił informatyka o program komputerowy, który by sprawdzał, czy różne ciekawe kafelki mogą pokrywać dowolnie duże powierzchnie.

– Nie ma sprawy – powiedział informatyk.

Na następnym spotkaniu pojawił się jednak z nieco zmieszaną miną.

– Sprawa byłaby prosta – zaczął – gdyby każda rodzina kafelków pokrywająca nieskończenie dużą podłogę pokrywała ją w sposób okresowy. Oznacza to, że moglibyśmy wtedy ułożyć z kafelków kwadrat, z wypustkami i wcięciami na bokach, a następnie kopie tych kwadratów kładlibyśmy obok siebie tak, że wszystkie wypustki i wcięcia pasowałyby do siebie (ramka 1). Napisałem krótki program komputerowy, który dla każdej rodziny kafelków znajduje właśnie taki wzorcowy kwadrat. Muszę się jednak liczyć z tym, że być może istnieją kafelki, które mogą pokryć nieskończenie dużą podłogę, ale tylko w sposób nieokresowy. Innymi słowy, dla takiej szczególnej rodziny kafelków nie będzie wzorcowego kwadratu, a mój program będzie go szukał w nieskończoność.

– Koledzy – odezwała się fizyczka – próbujecie rozwiązać typowe zadanie optymalizacyjne mające za cel zminimalizowanie jakiejś wielkości. Rozważmy problem, z którym styka się każda gospodyni: jak wyciąć z ciasta krążki na pierogi, nie marnując zbyt dużo powierzchni. Sposób jest bardzo prosty – każdy wycięty krążek powinien się stykać z sześcioma innymi. Środki krążków utworzą wtedy regularną sieć trójkątną (ramka 2). W przypadku waszych kafelków chcecie oczywiście, aby pole niepokrytej powierzchni wynosiło zero. Układ kafelków o minimalnej (czyli zerowej) powierzchni niepokrytej powinien być oczywiście okresowy. Optymalne struktury przestrzenne są zawsze regularne, czyli okresowe. Wierzcie mi, jestem fizykiem ciała stałego i z takimi problemami spotykam się na co dzień. Na przykład jest „oczywistą oczywistością", że materia w odpowiednio niskich temperaturach i odpowiednio wysokich ciśnieniach przyjmuje postać kryształu. Atomy, z których składa się nasz kawałek materii, są rozmieszczone w przestrzeni regularnie; w przypadku soli kuchennej, na przykład, atomy sodu i chloru tworzą sześcienną sieć krystaliczną (ramka 3).

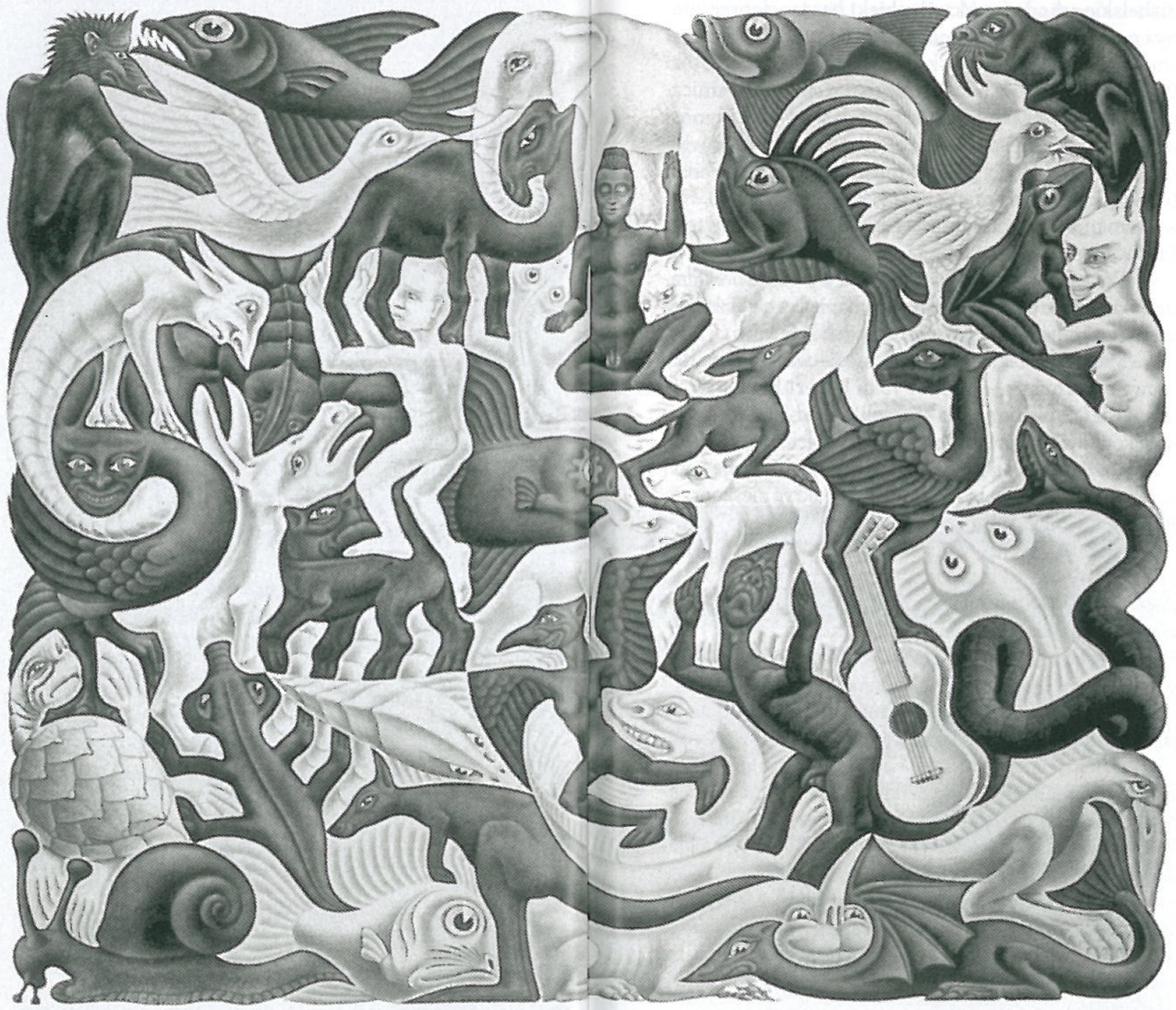
– Dlaczego tak się dzieje? – zapytałem.

– To proste. – Fizyczka uśmiechnęła się. – Podstawowe prawo fizyki mówi, że układ składający się z wielu oddziałujących obiektów (atomów lub cząsteczek) w niskiej temperaturze znajduje się w stanie o najmniejszej energii (będącej sumą oddziaływań między wszystkimi obiektami), w tak zwanym stanie podstawowym. Wszyscy wiemy, że stan podstawowy jest okresowy (jeśli przesuniemy wszystkie atomy o taką samą odległość – zwaną okresem – w tym samym kierunku, to ich położenia pokryją się z położeniami atomów przed przesunięciem).

– Mówiąc krótko, twierdzisz, że układ obiektów w przestrzeni, który minimalizuje energię, musi być okresowy.

– Oczywiście. Tego uczy nas doświadczenie. Zakładamy to na pierwszej stronie każdej książki z fizyki ciała stałego.

– Ale to założenie nigdy nie zostało udowodnione! Jest to tak zwany problem kryształu. Przedstawię ci następujący kontrprzykład: układ oddziałujących cząstek, którego stanem podstawowym jest konfiguracja nieokresowa. Cząstki mogą przebywać w jednakowo od siebie odległych węzłach regularnej sieci jednowymiarowej. >



Fot. Forum; Ryc. Anna Słowińska

1. DWA TYPY KAFELKÓW, WZORCOWY KWADRAT Z WYPUSTKAMI I WCIĘCIAMI, OKRESOWE POKRYCIE PŁASZCZYZNY

2. LICZBA CAŁUSKÓW I GĘSTO UPAKOWANE POMARAŃCZE

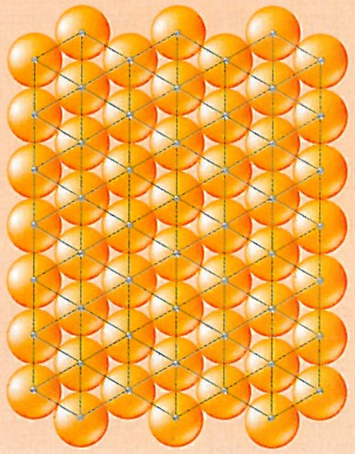
Z iloma monetami jednozłotowymi może się jednocześnie stykać dana moneta jednozłotowa? Łatwo się przekonać, że maksymalnie z sześcioma. Mówimy, że liczba całusków (z ang. *kissing number*) na płaszczyźnie wynosi sześć.

Jeżeli będziemy chcieli upakować monety jak najgęściej na stole, to każdą z monet otoczymy w taki sam sposób sześcioma innymi. Środki monet utworzą wtedy regularną sieć trójkątną.

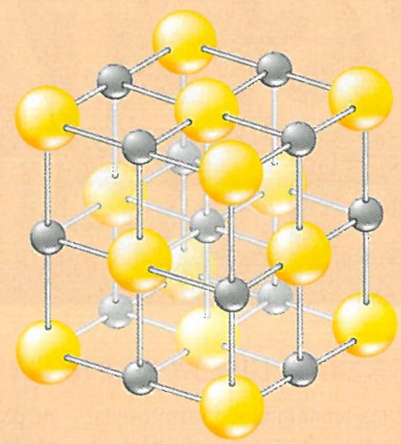
Isaac Newton rozważał analogiczny problem dla kul w przestrzeni. Twierdził, że z daną kulą może się stykać maksymalnie 12 innych kul o takim samym promieniu. Dopiero 200 lat później potwierdzono przypuszczenia Newtona. W 2003 roku Oleg Musin wykazał, że liczba całusków w przestrzeni czterowymiarowej wynosi 24. Nadal nieznana jest liczba całusków w przestrzeni pięciowymiarowej.

A jak wygląda najgęstsze upakowanie kul w przestrzeni? Wie to oczywiście każdy sprzedawca pomarańczy. Układa pierwszą warstwę pomarańczy w sposób analogiczny do monet na płaszczyźnie. Drugą i każdą następną warstwę kładzie na poprzedniej, wpasowując się w jej wgłębienia (można to za każdym razem zrobić na dwa sposoby).

Johannes Kepler w 1611 roku postawił hipotezę, że powyższa procedura doprowadza do najgęstszego upakowania kul w trzech wymiarach, to znaczy, że część przestrzeni niepokryta kulami jest wtedy najmniejsza z możliwych. Hipoteza Keplera i sprzedawców pomarańczy została udowodniona dopiero w 1989 roku przez Thomasa Halesa. Każde z wielu możliwych najgęstszych pokryć tworzy okresową sieć krystaliczną.



3. KRYSZTAŁ SOLI KUCHENNEJ



większe kule – atomy chloru
mniejsze kule – atomy sodu

Nasze cząstki się nie lubią, chcą być jak najdalej od siebie (energia oddziaływania między każdymi dwiema cząstkami jest dodatnia, oczywiście malejąca w miarę zwiększania się odległości między nimi). Z drugiej strony, energia każdej cząstki (zwana potencjałem chemicznym) jest ujemna. A więc w stanie podstawowym, w stanie o najmniejszej energii, z jednej strony powinno być jak najwięcej cząstek (każda z nich osobno obniża energię układu), ale z drugiej strony powinno być ich jak najmniej (każda para podwyższa energię układu). Można powiedzieć, że nasz układ jest sfrustrowany. Efektem tej frustracji, tego konfliktu dwóch czynników, są niezwykle ciekawe konfiguracje cząstek. Gęstość cząstek (liczba cząstek przypadających na jeden węzeł sieci) jako funkcja potencjału chemicznego jest funkcją rosnącą, ciągłą i prawie wszędzie stałą.

– To niemożliwe! – krzyknęli zgodnie fizyczka, informatyk i kafelkarz. – Funkcja rosnąca, która prawie wszędzie jest stała i nie ma żadnych skoków? To jakieś diabelskie urojenia.

– Żadne urojenia, to byt realnie istniejący – odpowiedziałem. – Choć, owszem, diabelski. Są to tak zwane diabelskie schody (ramka 4), obiekt bardzo dobrze znany i opisany przez matematyków. Zmieniając potencjał chemiczny, możemy uzyskać dowolną gęstość cząstek. Przykładowo, dla odpowiedniego potencjału chemicznego, gęstość cząstek w stanie podstawowym wynosi 2 / (√5 + 1). Taki stan podstawowy nie może być więc okresowy, bo wtedy gęstość musiałaby być ułamkiem (czyli, jak to mówią matematycy, liczbą wymierną). Nawiasem mówiąc, konfiguracja cząstek odpowiada wtedy tak zwanemu ciągowi Fibonacciego (ramka 5).

– No dobrze... – Fizyczka zaczęła się wycofywać. – Ograniczmy się więc do oddziaływań tylko między najbliższymi sąsiadami, tak jak w przypadku waszych kafelków.

– Mam dla ciebie smutną wiadomość – wtrącił się do rozmowy informatyk. – W 1966 roku Robert Berger skonstruował (albo odkrył, jak kto woli) układ 20 426 typów kafelków, kwadratów z wypustkami i wcięciami na bokach – takich, że mając do dyspozycji nieskończoną liczbę kopii kafelków każdego typu, możemy nimi pokryć nieskończoną powierzchnię, ale tylko w sposób nieokresowy. W każdym takim pokryciu wypustki i wcięcia sąsiednich kafelków idealnie do siebie pasują. Mamy więc tutaj przypadek lokalnych reguł dopasowywania się – a więc jak najbardziej oddziaływań między najbliższymi sąsiadami.

– Trochę za dużo tych typów kafelków, aby ich używać w mojej pracy – zauważył praktycznie kafelkarz.

– I co to ma wspólnego z rzeczywistymi układami fizycznymi? – zapytała fizyczka.

– Słuchaj – powiedziałem – mówiłaś o ogólnej procedurze minimalizacji. Twierdziłaś, że konfiguracje obiektów minimalizujące całkowitą energię muszą być okresowe. Nie upierałaś się, że dotyczy to tylko konkretnych układów fizycznych.

– Masz rację, powinnam być ostrożniejsza. Wy matematycy zawsze wymyślicie jakiś abstrakcyjny kontrprzykład. Natomiast Natura jest taka, że rzeczywiste oddziaływania zawsze prowadzą do perfekcyjnej regularności, czyli okresowości.

Nasza koleżanka nie miała jednak racji. Niedługo po naszym spotkaniu fizycy dokonali epokowego odkrycia. W 1984 roku zaprezentowali kryształ z pięciokątną symetrią. Wynikało z tego, że atomy układały się bardzo regularnie, ale nieokresowo (żadna struktura okresowa nie ma pięciokątnej symetrii). Nowa forma materii została nazwana kwazikryształem. Rozpoczęły się intensywne badania struktur nieokresowych. Powstały liczne prace doświadczalne i teoretyczne. Nadal jednak nie mamy realistycznego modelu mikroskopowego oddziałujących cząstek, którego stan podstawowy byłby kwazikrystaliczny. To jest słynny problem kwazikryształu.

Powyższe odkrycie oznaczało, że badanie struktur nieokresowych to nie tylko zajęcie dla matematyków i kafelkarzy. Okazało się, że układanie kafelków na balkonach może się przyczynić do rozwiązania fundamentalnego problemu fizyki. Zmotywowało nas to do intensywniejszej pracy.

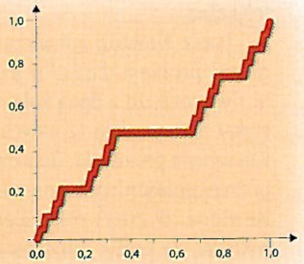
Od tego czasu spotykamy się coraz częściej. Konstruujemy różne zestawy kwadratowych kafelków. Boki kwadratów oznaczamy kolorami, które grają rolę wypustek i wcięć (ramka 6). Takie kolorowe dwuwymiarowe domina zostały zaproponowane w 1921 roku przez Alexandra Percy'ego MacMahona (patrz: Marek Penszko, „MacMahon i złamane serca", „WiŻ" 5/2007).

Używając nieskończonej liczby kopii naszych kafelków, staramy się pokryć płaszczyznę tak, aby kolory boków przylegających kwadratów były takie same. Zestaw 20 426 kafelków Bergera był pierwszym przykładem rodziny kafelków, którymi można pokryć płaszczyznę tylko w sposób nieokresowy. Obecnie najmniejsza taka rodzina, skonstruowana przez Karela Culika II w 1996 roku, składa się z 13 kafelków (ramka 6). My chcemy być lepsi. Naszym celem jest nieokresowe pokrycie płaszczyzny wymagające mniej niż 13 typów kafelków. Chcemy pobić rekord świata sprzed 12 lat.

DR HAB. JACEK MIĘKISZ pracuje na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW, jego specjalność to mechanika statystyczna i teoria gier.

4. SCHODY DIABELSKIE

Gęstość cząstek w stanie podstawowym jako funkcja potencjału chemicznego.
Suma długości wszystkich stopni jest równa 1.
Między każdymi dwoma stopniami jest następny o mniejszej długości.
Jest to więc wykres funkcji ciągłej, rosnącej, ale prawie wszędzie stałej.



5. KONFIGURACJA FIBONACCIEGO

Powyższą konfigurację otrzymaliśmy w następujący sposób.
● oznacza cząstkę, a ○ jej brak.
Zaczynamy od cząstki ● po lewej stronie i zastępujemy ją przez ●○.
W każdym kolejnym kroku ● zastępujemy przez ●○, a ○ przez ●.
Otrzymujemy następujące konfiguracje:

Ciąg długości kolejnych konfiguracji cząstek (1, 2, 3, 5, 8, 13, ...) jest ciągiem Fibonacciego, gdzie każda kolejna liczba jest równa sumie dwóch poprzednich.

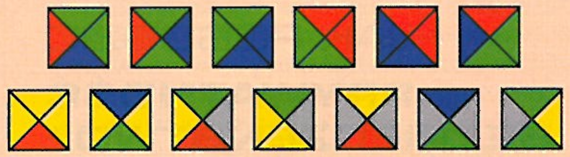
Gęstość cząstek w kolejnych krokach wynosi 1, 1/2, 2/3, 3/5, 5/8, 8/13... Ambitny czytelnik może udowodnić, że w nieskończonej konfiguracji Fibonacciego gęstość cząstek wynosi 2/(√5 +1). Jest to nieokresowy stan podstawowy dla odpychających oddziaływań między cząstkami i pewnego potencjału chemicznego cząstek.

6. KRÓTKA HISTORIA REKORDU ŚWIATA

W 1900 roku David Hilbert przedstawił 23 fundamentalne problemy matematyczne. Druga część 18. problemu zawiera w istocie następujące (nadal pozostawione bez odpowiedzi) pytanie: czy istnieje wielobok pokrywający nieskończoną płaszczyznę tylko w sposób nieokresowy?

W 1961 roku Hao Wang rozważał kwadratowe domina, nazywane również kwadratami MacMahona. Postawił hipotezę, że każdy skończony zestaw płytek domina, nazywany przez nas kafelkami, pokrywający płaszczyznę może pokryć ją także w sposób okresowy.

Oto niektóre kontrprzykłady:
>> Robert Berger, 20 426 kafelków, 1966
>> Raphael Robinson, 56 kafelków, 1971
>> Robert Ammann, 16 kafelków, 1977
>> Jarkko Kari, 14 kafelków, 1996
>> Karel Culik II, 13 kafelków, 1996



Powyższe kafelki skonstruowane przez Karela Culika II pokrywają płaszczyznę tylko w sposób nieokresowy. Kolory boków przylegających kwadratów muszą być takie same. Uwaga: kafelków nie możemy obracać.

Jeżeli dopuścimy do pokrywania płaszczyzny dowolnymi wielobokami, to najmniejszym zbiorem kafelków pokrywających płaszczyznę tylko nieokresowo jest słynny latawiec i strzała Rogera Penrose'a z 1974 roku.

Rys. Anna Skowrońska