Opowieść o paradoksalnych grach hazardowych, perpetuum mobile i silnikach molekularnych.

> JACEK MIĘKISZ

Hazardzista

PO RAZ PIERWSZY zobaczyłem go wiosennego dnia na bazarze, otoczonego tłumem ludzi. Pokazywał trzy karty: jedną z obu stron czerwoną, jedną z obu zieloną, a jedną z jednej zieloną, z drugiej czerwoną. Wrzucał je do kapelusza, mieszał, następnie jedną wyciągał i kładł na stoliczku, tak że widać było jedynie kolor górnej strony. Namawiał do zakładów: trzeba było postawić 10 zł; jeśli dolna strona była innego koloru niż widoczny, wypłacał 20 zł.

Wyglądało to na grę sprawiedliwą. Wydawało się, że z równym prawdopodobieństwem strona dolna może mieć identyczny kolor jak górna lub być innego koloru, więc średnio po wielu grach nie powinniśmy ani stracić, ani zyskać. No chyba żebyśmy mieli szczęście lub pecha – z czym zawsze w przypadku gier hazardowych trzeba się liczyć.

Zacząłem notować wyniki. Po pewnym czasie zauważyłem, że średnio tylko w jednej na trzy rozgrywki dolna strona karty była innego koloru niż górna. Coś było nie tak... Wziąłem kawałek kartki, ołówek i po chwili obliczyłem, że prawdopodobieństwo takiego zdarzenia wynosi dokładnie 1/3 (ramka poniżej), a nie 1/2, jak błędnie zakładałem. Czyli w dwóch trzecich przypadków wygrywa bazarowy krupier! Tu cię mam, pomyślałem i spojrzałem w stronę hazardzisty, ale on już zdążył się ulotnić.

Nie pamiętałem już o grze w trzy karty, kiedy kilka miesięcy później wszedłem przypadkowo na stronę internetową z grami hazardowymi. W pierwszej z nich, gdy w wyniku losowego internetowego „rzutu" monetą ukazywał się orzeł, dostawało się złotówkę, reszka oznaczała jej stratę. Była to oczywiście gra sprawiedliwa – prawdopodobieństwo wygrania wynosiło 1/2 dla obu stron.

W drugiej grze do dyspozycji były dwie monety obciążone tak, że prawdopodobieństwo wyrzucenia orła dla pierwszej wynosiło 9/10, a dla drugiej 1/4. Podobnie jak w poprzedniej grze, orzeł oznaczał złotówkę dla nas, reszka złotówkę dla komputerowego krupiera. Wybór internetowo rzucanej monety zależał od tego, czy wysokość dotychczas zgromadzonego kapitału była podzielna przez 3. Jeżeli tak, rzucało się monetą dla nas „korzystniejszą", jeśli nie – mniej korzystną. Była to również gra sprawiedliwa – prawdopodobieństwo wzrostu kapitału było równe prawdopodobieństwu jego obniżki (ramka na str. 59).

Autor strony internetowej sugerował, aby w celu urozmaicenia gry pozwolić komputerowi na losowy wybór jednej z dwóch opisanych gier. Skusiłem się i już po kilkunastu minutach byłem na poważnym minusie. To tylko chwilowy pech, pomyślałem, i grałem dalej, jednak mój kapitał ciągle malał. Dość! Znów wystarczyło kilka prostych obliczeń, aby pokazać, że prawdopodobieństwo przegranej jest w tym przypadku większe niż wygranej. Okazało się, że złożenie dwóch gier sprawiedliwych może dawać grę niesprawiedliwą (dla nas, oczywiście).

NIE DAJ SIĘ OSZUKAĆ – GRA W TRZY KARTY

Mamy trzy karty: jedną czerwoną po obu stronach, jedną zieloną po obu stronach i jedną zieloną po jednej i czerwoną po drugiej. Wybieramy losowo jedną kartę i kładziemy ją na stole. Widzimy, że górna strona jest czerwona. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dolna strona jest również czerwona? Wydaje się, że sprawa jest trywialna, a szukane prawdopodobieństwo to 1/2. Policzmy jednak.

Ile mamy wszystkich możliwych wyborów? Zauważmy, że wybieramy losowo nie tylko kartę, ale i jej stronę. Wynika stąd, że jest sześć możliwych wyników, z czego oczywiście w połowie przypadków strona dolna będzie czerwona.

Ale uwaga: dysponujemy dodatkową informacją – znamy kolor strony górnej. Oznacza to, że liczba możliwości jest zredukowana do trzech: wybraliśmy kartę czerwoną po obu stronach i jedną z jej stron jako stronę górną albo kartę z jednej strony czerwoną, a z drugiej zieloną i położyliśmy ją stroną czerwoną do góry. Z tych trzech możliwości aż w dwóch przypadkach strona dolna ma kolor czerwony. Szukanym prawdopodobieństwem jest więc 2/3.

Fot. East News

W obu grach prawdopodobieństwo wygranej jest równe prawdopodobieństwu przegranej. Kiedy jednak będziemy wybierać gry w sposób losowy, symetria zostanie złamana. Przekonałem się o tym na własnej skórze, a następnie udowodniłem odpowiednie twierdzenie matematyczne, nadal jednak nie wiedziałem, jaki mechanizm jest odpowiedzialny za złamanie symetrii. Czy kryje się za tym jakaś fundamentalna zasada? Chętnie zapytałbym o to hazardzistę z bazaru – bo nie miałem wątpliwości, że to właśnie on założył tę stronę internetową.

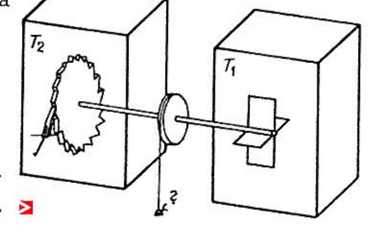
Jakiś czas później moją uwagę zwróciło ogłoszenie o popularnonaukowym odczycie „Nie daj się oszukać – od gier hazardowych do termodynamiki". Domyślałem się wykładowcy – i rzeczywiście, był nim mój znajomy hazardzista.

– Czy wiecie Państwo, jaka jest fundamentalna zasada fizyki? – spytał słuchaczy i uśmiechnął się szelmowsko. – Nie ma nic za darmo! Do wykonania pracy potrzebna jest energia. To oczywiste, zdroworozsądkowe stwierdzenie nosi nazwę zasady zachowania energii albo pierwszej zasady termodynamiki. Mniej oczywista jest ta druga: nie można wykonać pracy kosztem samego ciepła. Innymi słowy, nie można przekształcić, bez korzystania z dodatkowych źródeł energii, chaotycznego ruchu cząsteczek otaczającego nas powietrza w użyteczną pracę. Podkreślam – powiedział z naciskiem – że chcemy zaprząc do pracy ruch chaotyczny.

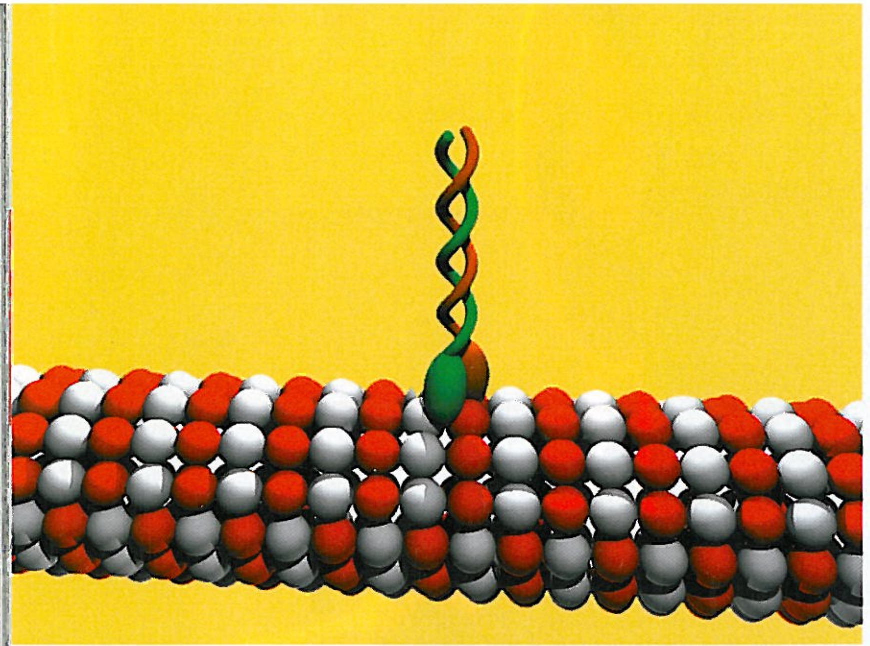
– Łatwo wykorzystać ruch w jednym kierunku – kontynuował – młyny i wiatraki przekształcają energię kinetyczną płynącej wody lub wiejącego wiatru na przykład w energię elektryczną i ostatecznie na pracę wielu pożytecznych urządzeń. Ale przyjrzyjmy się następującemu urządzeniu. – Wskazał konstrukcję na stole: oś z wiatraczkiem po jednej stronie, zębatką i zapadką po drugiej, szpulką z nitką pośrodku (rysunek obok). – Cząsteczki powietrza uderzają w łopatki wiatraczka. Wiatraczek, podobnie jak całe urządzenie, jest bardzo mały. Losowe fluktuacje powodują, że od czasu do czasu więcej cząsteczek uderza w łopatki z jednej strony niż z drugiej. Jest to sytuacja analogiczna do ruchów Browna dużej cząsteczki zawiesiny uderzanej przypadkowo przez małe cząsteczki otaczającej ją cieczy. Postarajmy się wykorzystać te losowe fluktuacje.

Na tym to on się zna, pomyślałem.

– Bez zapadki – objaśniał – wiatraczek obracałby się raz w jedną stronę, raz w drugą. >



Zębatka Smoluchowskiego–Feynmana.



Kinezyna krocząca po mikrotubuli.

Zapadka umożliwia ruch tylko w jednym kierunku. W wyniku tej asymetrii szpulka z nitką powinna móc podnosić mikroskopijne ciężary. Urządzenie takie – podsumował – przekształca więc losowe fluktuacje na ruch w jednym wybranym kierunku. Uzyskujemy dzięki temu pracę kosztem fluktuacji, mamy więc darmowe źródło energii.

I wtedy przypomniał mi się problem złamania symetrii w internetowej grze hazardowej.

– Gdyby to działało, nie byłoby mnie tutaj – powiedział po chwili wykładowca – używałbym życia gdzieś daleko na plażach mórz południowych. – Odwrócił się do słuchaczy. – Dlaczego to nie działa? Gdzie tkwi problem?

Sala milczała.

– Otóż, drodzy państwo, zapadka, podobnie jak wiatraczek, również jest uderzana przez otaczające ją cząsteczki, przez co od czasu do czasu podnosi się przypadkowo i ciężarek opada. W rezultacie średnie przesunięcie ciężarka jest zerowe, sama asymetria zapadki nie wystarcza. Jeżeli temperatura powietrza wokół zapadki byłaby mniejsza od temperatury powietrza wokół wiatraczka (Tak jak różne prawdopodobieństwa wyrzucenia orła dla różnych monet, pomyślałem), to fluktuacje zapadki byłyby mniejsze od fluktuacji wiatraczka i urządzenie rzeczywiście wykonywałoby pracę kosztem energii pobranej z cieplejszego otoczenia, oddając jej część do otoczenia zimniejszego. Jest to przykład silnika Browna[1]. Wtedy jednak musielibyśmy utrzymywać powietrze wokół wiatraczka i zapadki w stałych temperaturach, a to oczywiście kosztuje. Jeszcze jedna próba zbudowania perpetuum mobile (drugiego rodzaju) i obalenia drugiej zasady termodynamiki okazała się więc bezowocna – zakończył swój wykład prelegent.

Rozległy się brawa.

Chciałem podejść do niego i spytać, jak to się stało, że przeszedł na „jasną" stronę, że zrezygnował z żerowania na ludzkiej niewiedzy, a wręcz zaczął doradzać, jak się ustrzec przed sprytnymi hazardzistami. Ale, jak poprzednio, nie zdążyłem – mój znajomy już wyszedł. Byłem jednak pewien, że wkrótce znów go spotkam.

Nie czekałem długo. Na jednej ze stron internetowych poświęconych biologii ukazał się następujący artykuł:

SILNIKI MOLEKULARNE,
CZYLI JAK ZAPRZĄC DO PRACY LOSOWE FLUKTUACJE

Podstawą wszelkich procesów życiowych jest ruch. W komórkach biologicznych zdolność do przemieszczania się wykazują specjalnie do tego przystosowane białka motoryczne (zwane też kroczącymi lub transportowymi). Są to tak naprawdę miniaturowe silniki poruszające się wzdłuż molekularnych torów.

Na przykład kinezyny maszerują po tzw. mikrotubulach, przenosząc na swoich ramionach substancje niezbędne do funkcjonowania komórki (rysunek obok). Energię czerpią z hydrolizy ATP – jedna cząsteczka ATP pozwala na przesunięcie się o 8 nm. Sprawność takiego silnika jest blisko dwa razy większa od sprawności silników spalinowych, mają one kilkanaście razy większą moc w przeliczeniu na masę (jedna cząsteczka kinezyny waży zaledwie $5 \cdot 10^{-19}$ g i ma około 50 nm długości).

W komórkach roślinnych i zwierzęcych są oczywiście też inne zadania do wykonania. Za pracę naszych mięśni na przykład są odpowiedzialne wyspecjalizowane nanosilniki – miozyny. Co prawda jedna cząsteczka ATP dostarcza energii wystarczającej tylko na jeden ruch miozyny, ale już skoordynowana działalność milionów silników miozynowych pozwala chodzić i podnosić ciężary. Rybosomy z kolei, przesuwając się wzdłuż nici RNA, odczytują kod genetyczny (tłumaczą kod genetyczny na sekwencje aminokwasów i stąd ten proces nazywany jest translacją) i na jego podstawie przyłączają do siebie kolejne aminokwasy, tworząc w efekcie cząsteczkę białka pełniącego konkretne funkcje w komórce.

Nierozwiązanym dotychczas problemem jest wyjaśnienie mechanizmu silników molekularnych przekształcających energię chemiczną w energię kinetyczną ruchu. W szczególności fundamentalne pytanie brzmi: Co wyznacza kierunek ruchu? Jest to wspólne zadanie dla biologów, chemików, fizyków, matematyków i nanoinżynierów.

Fizycy zaproponowali kilka hipotetycznych mechanizmów ukierunkowanego ruchu w skali nano. W jednym z nich silnik białkowy jest opisywany przez cząsteczkę podlegającą ruchom Browna (analogicznym do ruchu zawiesiny bombardowanej nieustannie cząsteczkami otaczającej ją wody) i dwóm okresowo działającym asymetrycznym deterministycznym siłom. Potencjały tych sił odpowiadają dwóm różnym biochemicznym stanom silnika. Siły te osobno nie są w stanie spowodować ruchu w jednym wyznaczonym kierunku. Energia chemiczna wyzwalana w hydrolizie ATP umożliwia cząsteczce losowe skoki między potencjałami. Okazuje się, że losowe złożenie dwóch ruchów o zerowym średnim przemieszczeniu prowadzi do ruchu w jednym kierunku, do transportu substancji molekularnych do określonego miejsca w komórce.

Ruch silnika molekularnego przypomina w tym modelu dynamikę zmian kapitału w paradoksalnych grach hazardowych. W grach takich, zaproponowanych przez Juana Parrondo[2], złożenie dwóch gier sprawiedliwych (albo nawet „przegrywających"), z zawartością portfela fluktuującą wokół kapitału początkowego, daje nam grę „wygrywającą", w którą grając wielokrotnie, stajemy się coraz bogatsi.

Nasz hazardzista przebył długą drogę, pomyślałem. Drogę analogiczną do historii rozwoju badań nad zjawiskami losowymi. Wszystko zaczęło się bowiem od gier hazardowych. Zaobserwowane prawidłowości przyczyniły się do powstania i rozwoju rachunku prawdopodobieństwa – niezwykle ważnej gałęzi matematyki. Kiedy fizycy przekonali się, że materia jest złożona z cząsteczek i atomów, do jej opisu zaczęli używać praw statystycznych. Dopiero ostatnio biolodzy dochodzą do przekonania, że podstawowe życiowe procesy biochemiczne podlegają tym samym odwiecznym prawom statystycznym, które opisują zarówno gry hazardowe, jak i ruch cząstek materialnych.

W procesach tych nie można zaniedbać losowych fluktuacji, a być może da się je wykorzystać – tak jak to nieustannie czyni natura.

Z niecierpliwością czekam na kolejny ruch naszego hazardzisty.

Wszelkie podobieństwo postaci występujących powyżej do rzeczywistych osób jest całkowicie przypadkowe. Nieprzypadkowe są natomiast związki gier hazardowych z rachunkiem prawdopodobieństwa, fizyką statystyczną i funkcjonowaniem żywych komórek biologicznych.

DR HAB. JACEK MIĘKISZ pracuje na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW, jego specjalność to mechanika statystyczna i teoria gier.

[1] Idea urządzenia wykorzystującego ruchy Browna do wykonania użytecznej pracy została po raz pierwszy przedyskutowana w 1912 roku przez Mariana Smoluchowskiego, a potem rozwinięta przez Richarda Feynmana („Feynmana wykłady z fizyki", tom I, część 2, rozdział 46).

[2] Paradoksalne gry hazardowe zaproponował w 1996 roku Juan Parrondo w nieopublikowanym artykule „How to cheat a bad mathematician". Opis paradoksalnych gier hazardowych za pomocą łańcuchów Markowa można znaleźć w: J. Miękisz, „O dwóch takich, co chcieli zarobić na fluktuacjach", Delta 11: 1–4 (2006) (www.mimuw.edu.pl/delta).

GRA W DWIE GRY SPRAWIEDLIWE MOŻE BYĆ GRĄ PRZEGRYWAJĄCĄ

W najprostszej grze hazardowej o wygranej decyduje rzut monetą. Jeśli moneta pokaże orła, dostajemy złotówkę, reszka oznacza stratę złotówki. Jest to oczywiście gra sprawiedliwa. Z równym prawdopodobieństwem możemy wygrać i przegrać.

Ciekawsza jest następująca gra w dwie monety. Niech prawdopodobieństwo wyrzucenia orła dla pierwszej z nich wynosi 9/10, a dla drugiej 1/4.

Gramy wielokrotnie. Wybór rzucanej monety zależy od reszty z dzielenia naszego kapitału przez 3. Jeśli nasz kapitał jest podzielny przez 3, czyli reszta z dzielenia wynosi 0, to rzucamy pierwszą monetą, w przeciwnym przypadku, to znaczy jeśli reszta jest równa 1 lub 2, rzucamy drugą monetą. Rozważmy cykle w dwóch przeciwnych kierunkach:

$$0 \to 1 \to 2 \to 0 \text{ i } 0 \to 2 \to 1 \to 0$$

Następujące po sobie zdarzenia są niezależne i wobec tego prawdopodobieństwo danego cyklu jest równe iloczynowi prawdopodobieństw pojedynczych zmian naszego kapitału. Wynika stąd, że prawdopodobieństwa obu cykli, odpowiednio

$$9/10 \times 1/4 \times 1/4 \text{ i } 1/10 \times 3/4 \times 3/4,$$

są sobie równe.

Rozpatrzmy teraz sytuację, w której za każdym razem dokonujemy losowego wyboru jednej z powyższych gier. Prawdopodobieństwa powyższych cykli są wtedy równe odpowiednio

$$1/2\,(9/10 + 1/2) \times 1/2\,(1/4 + 1/2) \times 1/2\,(1/4 + 1/2) = 63/640$$
$$1/2\,(1/10 + 1/2) \times 1/2\,(3/4 + 1/2) \times 1/2\,(3/4 + 1/2) = 75/640,$$

gdzie 1/2 przed nawiasami odpowiada prawdopodobieństwu wyboru jednej z dwóch gier w każdej rozgrywce.

Widzimy, że cykl odpowiadający zwiększaniu się naszego kapitału ma mniejsze prawdopodobieństwo niż cykl odwrotny. Okazuje się, że złożenie dwóch gier sprawiedliwych może być grą przegrywającą.