

Wybrane własności modeli transportu na hipergrafach metrycznych

Aleksandra Falkiewicz

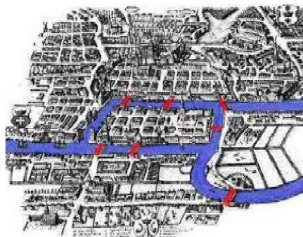
Instytut Matematyki Politechniki Łódzkiej

Seminarium BIOFIZMAT 3

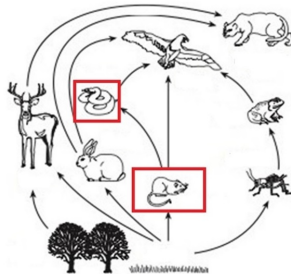
Centrum Banacha, Warszawa, 4–5 grudnia 2015 roku

- Modelowanie ruchu turystycznego na kopule szczytowej Kasprowego Wierchu
- Wyprowadzenie modelu transportu na grafie metrycznym
- Wprowadzenie hipergrafu metrycznego
- Własności rozwiązań problemu na hipergrafie
- Zastosowanie modelu do zagadnień rozprzestrzeniania mutacji genów
- Związek rozważanego modelu z podejściem opartym na równaniach różniczkowych zwyczajnych

Wybrane przykłady modeli opartych na teorii grafów



<http://people.engr.ncsu.edu/mfms/SevenBridges/>



<http://science.withmsbaron.wordpress.com>

Rysunek: Na rysunku po lewej stronie graf obrazuje problem siedmiu mostów w Królewcu, którego rozwiązanie przypisuje się Leonardowi Eulerowi. Graf po prawo przedstawia relacje pomiędzy gatunkami w łańcuchu pokarmowym.

Czasoprzestrzenne rozmieszczenie ruchu turystycznego w rejonie Kasprowego Wierchu (lato 2014)



Tatrzański
Park Narodowy

Karolina Taczanowska
Christiane Brandenburg
Andreas Muhar
Hemma Preisel

Antoni Zięba
Jan Krzeptowski
Stanisław Zięba
Szymon Ziobrowski

Joanna Hibner
Weronika Makaruk
Heinrich Sostmann
Christoph Graf

Rafael Benitez
Vicente Bolos
Luis M. Gonzalez
Xavier Garcia
Jose L. Toca-Herrera

130 wolontariuszy TPN 😊

24.09.2015, Zakopane



Układ szlaków w rejonie Kasprowego Wierchu



Rozważmy sieć połączeń pomiędzy obiektami reprezentowaną przez prosty skierowany graf metryczny

$$G = (\{v_1, v_2, \dots, v_n\}, \{e = v_i v_j \times [0, 1] : i, j = 1, 2, \dots, n\}),$$

który posiada n wierzchołków v_1, v_2, \dots, v_n oraz m krawędzi

e_1, e_2, \dots, e_m . Załóżmy, że G jest grafem spójnym, ale

niekoniecznie silnie spójnym. Dowolną krawędź e parametryzujemy

w taki sposób, że 0 znajduje się początku krawędzi - e_{init} , a 1 w jej końcu - e_{term} .

Zdefiniujmy dodatkowe macierze, które pozwolą wprowadzić strukturę grafową do modelu opartego na układzie równań różniczkowych. **Wyjściową macierzą incydencji**,

$\Phi^- = (\phi_{ij}^-)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$, oraz **wejściową macierzą incydencji**,

$\Phi^+ = (\phi_{ij}^+)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ nazywamy odpowiednio macierze, których elementy spełniają

$$\phi_{ij}^- = \begin{cases} 1 & \text{dla } v_i \xrightarrow{e_j} \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}, \quad \phi_{ij}^+ = \begin{cases} 1 & \text{dla } \xrightarrow{e_j} v_i \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Dodatkowo krawędziom przyporządkowujemy nieujemne wagi.

Wagę krawędzi e_j wychodzącej z wierzchołka v_i oznaczamy przez w_{ij} . Wagi wszystkich krawędzi wchodzących z jednego wierzchołka powinny sumować się do 1, stąd

$$\forall i=1,2,\dots,n \quad \sum_{j, v_i=e_j \text{ init}} w_{ij} = 1. \quad (1)$$

Ważoną wyjściową macierzą incydencji, nazywamy macierz Φ_w^- , która powstaje z macierzy Φ^- poprzez zastąpienie niezerowego wyrazu Φ_{ij}^- przez w_{ij} .

Zauważmy, że Φ_w^- jest macierzą, której wiersze sumują się do jedynki.

Za pomocą przedstawionych macierzy sąsiedztwa możemy zdefiniować krawędziową macierz sąsiedztwa $\mathbb{K} = (k_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n}$, która później znajdzie swoje zastosowanie modelu transportu, jako $\mathbb{K} = (\Phi_w^-)^T \Phi^+$, czyli

$$k_{ij} = \begin{cases} w_{ki} & \text{if } \exists_k \xrightarrow{e_j} v_k \xrightarrow{e_i} \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases} \quad (2)$$

Zauważmy, że jeżeli w grafie nie występują wierzchołki, z których nie wychodzą żadne krawędzie (tzw. ujścia) to macierz \mathbb{K} jest stochastyczna.

Oznaczmy przez $u_j(x, t)$ gęstość substancji w położeniu x w chwili czasu $t \geq 0$. Przyjmijmy, że płynie ona wzdłuż krawędzi e_j (parametryzowanej przez $x \in [0, 1]$) z prędkością $c_j > 0$.

Przy założeniu, że ilość substancji w układzie nie ulega zmianie strumień powinien spełniać prawo Kirchhoffa w każdym wierzchołku tj. warunek

$$\sum_{j=1}^m w_{ij} \phi_{ij}^- c_j u_j(0, t) = \sum_{j=1}^m \phi_{ij}^+ c_j u_j(1, t), \quad t > 0, i \in 1, \dots, n.$$

Wprowadźmy jeszcze współczynniki m , które odpowiadają za przemieszczenie masy pomiędzy krawędziami w trakcie przepływu, w szczególności współczynnik m_{ij} odpowiada przemieszczeniu z krawędzi j na krawędź i . Ostatecznie przepływ substancji na każdej krawędzi może zostać opisany układem równań:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u_j(x, t) = -c_j \partial_x u_j(x, t) + \sum_{k=1}^m m_{jk} u_k(x, t), \\ \quad \quad \quad x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ u_j(x, 0) = f_j(x), \\ \phi_{ij}^- c_j u_j(0, t) = w_{ij} \sum_{k=1}^m \phi_{ik}^+ c_k u_k(1, t). \end{array} \right.$$

Jeżeli Φ^- jest operatorem surjektywnym, to problem można zapisać w postaci operatorowej

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t &= -\mathbb{C}\mathbf{u}_x + \mathbb{M}\mathbf{u}, & \mathbf{u}(0) = \mathbf{f} \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbb{K}\mathbf{u}(1) \end{cases}, \quad (3)$$

gdzie $\mathbb{C} = \text{diag}\{c_1, \dots, c_m\}$, natomiast

$$\mathbb{K} = \mathbb{C}^{-1}(\Phi_w^-)^T \Phi^+ \mathbb{C}. \quad (4)$$

Widzimy, że z matematycznego punktu widzenia zagadnienie (3) ma sens gdy \mathbb{K} jest dowolną macierzą, niekoniecznie daną w postaci (4).

Gdybyśmy chcieli interpretować problem z dowolną macierzą \mathbb{K} w języku teorii grafów, musimy wprowadzić uogólnienie grafu jakim jest hipergraf.

Definicja (hipergraf metryczny)

Przez hipergraf będziemy rozumieć dowolną parę uporządkowaną $H = (V, E)$ gdzie $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ jest niepustym zbiorem wierzchołków, zaś $E = \{(v, F) \times [0, 1] : v \in V, F \subset V\}$ zbiorem hiperkrawędzi.

Spróbujmy zbudować graf G w taki sposób, że macierz \mathbb{K} jest krawędziową macierzą sąsiedztwa tego grafu. Zgodnie z jej definicją dla $\mathbb{K} = (k_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$

$$k_{ij} = \begin{cases} w_{ki} & \text{jeżeli } \exists_k \xrightarrow{e_j} v_k \xrightarrow{e_i} \\ 0 & \text{w p.p.;} \end{cases},$$

gdzie przypomnijmy w_{ki} jest wagą krawędzi e_i , która wychodzi z wierzchołka v_k . Rozważmy macierz postaci

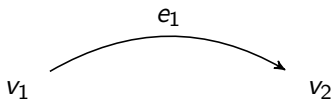
$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Spróbujemy zbudować graf G w taki sposób, że macierz \mathbb{K} jest krawędziową macierzą sąsiedztwa tego grafu. Zgodnie z jej definicją dla $\mathbb{K} = (k_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$

$$k_{ij} = \begin{cases} w_{ki} & \text{jeżeli } \exists_k \xrightarrow{e_j} v_k \xrightarrow{e_i} , \\ 0 & \text{w p.p.;} \end{cases}$$

gdzie przypomnijmy w_{ki} jest wagą krawędzi e_i , która wychodzi z wierzchołka v_k .

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{1}{2} \\ \mathbf{1} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

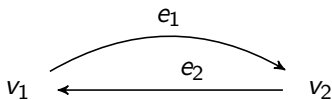


Spróbujemy zbudować graf G w taki sposób, że macierz \mathbb{K} jest krawędziową macierzą sąsiedztwa tego grafu. Zgodnie z jej definicją dla $\mathbb{K} = (k_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$

$$k_{ij} = \begin{cases} w_{ki} & \text{jeżeli } \exists_k \xrightarrow{e_j} v_k \xrightarrow{e_i} \\ 0 & \text{w p.p.;} \end{cases},$$

gdzie przypomnijmy w_{ki} jest wagą krawędzi e_i , która wychodzi z wierzchołka v_k .

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{\frac{1}{2}} \\ \mathbf{1} & \mathbf{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

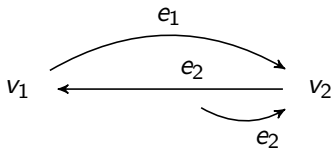


Spróbujemy zbudować graf G w taki sposób, że macierz \mathbb{K} jest krawędziową macierzą sąsiedztwa tego grafu. Zgodnie z jej definicją dla $\mathbb{K} = (k_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$

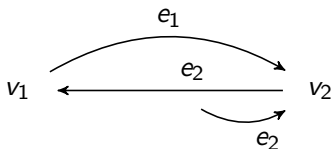
$$k_{ij} = \begin{cases} w_{ki} & \text{jeżeli } \exists_k \xrightarrow{e_j} v_k \xrightarrow{e_i} \\ 0 & \text{w p.p.;} \end{cases},$$

gdzie przypomnijmy w_{ki} jest wagą krawędzi e_i , która wychodzi z wierzchołka v_k .

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$



$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Zgodnie z rysunkiem krawędź e_2 musiałaby mieć koniec jednocześnie w wierzchołku v_1 jak i w v_2 . Wierzchołki te nie mogą się pokrywać, gdyż wtedy krawędź e_1 stałaby się pętlą, co jest sprzeczne z założeniem. Nie istnieje więc graf, dla którego \mathbb{K} jest krawędziową macierzą sąsiedztwa. Istnieje jednak odpowiedni hipergraf $(\{v_1, v_2\}, \{(v_1, \{v_2\}), (v_2, \{v_1, v_2\})\})$.

Definicja

Problemem transportowym na hipergrafie metrycznym nazywamy problem postaci

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t &= -\mathbb{C}\mathbf{u}_x + \mathbb{M}\mathbf{u}, & \mathbf{u}(0) = \mathbf{f} \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbb{K}\mathbf{u}(1) \end{cases} \quad (5)$$

gdzie \mathbb{K} jest dowolną macierzą, a \mathbb{C} nieujemną macierzą diagonalną.

Mówimy, że problem (5) jest grafowo realizowalny jeżeli istnieje graf G , taki że macierze incydencji Φ_w^-, Φ^+ tego grafu spełniają warunek

$$\mathbb{C}^{-1}(\Phi_w^-)^T \Phi^+ \mathbb{C} = \mathbb{K}.$$

Twierdzenie (istnienie i nieujemność rozwiązań)

Dla dowolnej macierz \mathbb{K} , problem transportowy na hipergrafie metrycznym posiada jednoznaczne rozwiązanie

$$\mathbf{u}(x, t) = e^{tA}\mathbf{f}(x),$$

gdzie e^{tA} jest półgrupą operatorów generowaną przez operator $A := -\mathbb{C}\partial_x + \mathbb{M}$ zdefiniowany na dziedzinie

$$D(A) = \left\{ \mathbf{u} \in W_1^1([0, 1])^m : \mathbf{u}(0) = \mathbb{K}\mathbf{u}(1) \right\}.$$

Ponadto rozwiązanie (5) jest nieujemne na nieujemnym warunku początkowym wtedy i tylko wtedy gdy macierz \mathbb{K} jest nieujemna.

Twierdzenie (grafowa realizowalność)

Model transportu na hipergrafie metrycznym jest grafowo realizowalany przez graf G bez krawędzi wielokrotnych wtedy i tylko wtedy gdy spełnione są następujące warunki

- 1 dowolne dwa wiersze/kolumny macierzy \mathbb{K} mają na tych samych współrzędnych wyrazy niezerowe lub są ortogonalne;
- 2 jeżeli istnieją dwa indeksy i, j takie, że i -ty i j -ty wiersz oraz i -t i j -ta kolumna zerują się na tych samych współrzędnych to są one zerowe.

Twierdzenie (jawna postać rozwiązania problemu, przypadek stałych prędkości)

Jeżeli prędkości ruchu w problemie transportowym na hipergrafie metrycznym są stałe, tj. $\mathbb{C} = c\mathbb{I}$, $c \in \mathbb{R}_+$, to rozwiązanie problemu przybiera postać dla $-n \leq x - ct \leq -n + 1$, $n \in \mathbb{N}$

$$e^{tA}f(x) = e^{\frac{1}{c}Mx} \left(\mathbb{K}e^{\frac{1}{c}M} \right)^n e^{-\frac{1}{c}M(x-ct+n)} f(x - ct + n).$$

W szczególności dla przypadku niezaburzonego jest ono postaci

$$e^{tA}f(x) = \mathbb{K}^n f(x - ct + n).$$

Twierdzenie (jawna postać rozwiązania problemu, przypadek współmiernych prędkości)

Jeżeli w problemie występują stałe prędkości ruchu na każdej z krawędzi, które spełniają dodatkowo warunek współmierności, czyli

$$\forall_{i=1,2,\dots,m} \exists_{c \in \mathbb{R}} \frac{c}{c_i} \in \mathbb{N},$$

to istnieją operatory ograniczone U, U^{-1} takie, że rozwiązanie jest postaci

$$e^{tA}f(x) = U^{-1}e^{ctA}Uf(x),$$

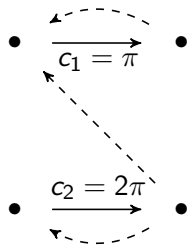
gdzie e^{tA} jest rozwiązaniem pewnego przekształconego zagadnienia transportowego z jednostkowymi prędkościami.

Algorytm przejścia pomiędzy wyżej wymienionymi problemami

KROK 1 Dokonując przeskalowania argumentów $t = \frac{\tau}{c}$, $x_i = \frac{c}{c_i} x$ tworzymy problem, w którym transport odbywa się na hipergrafie o hiperkrawędziach różnej długości, ale z jednostkową prędkością.

Przykład Rozważmy zagadnienie:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t = - \begin{bmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 2\pi \end{bmatrix} \mathbf{u}_x, & t > 0, x \in (0, 1) \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{f} \\ \mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(1) \end{cases}$$

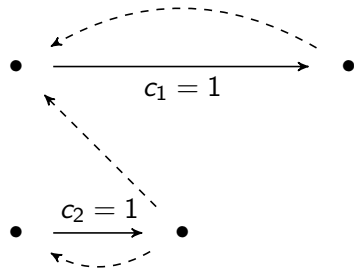


Algorytm przejścia pomiędzy wyżej wymienionymi problemami

KROK 1 Dokonując przeskalowania argumentów $t = \frac{\tau}{c}$, $x_i = \frac{c}{c_i}x$ tworzymy problem, w którym transport odbywa się na hipergrafie o hiperkrawędziach różnej długości, , ale z jednostkową prędkością.

Przykład Po przeskalowaniu przyjmuje on postać:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{\tau}^1 = -u_y^1, \quad t > 0, \quad y \in (0, 2) \\ u_{\tau}^2 = -u_y^2, \quad t > 0, \quad y \in (0, 1) \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{f} \\ u^1(0) = u^1(2) + u^2(1) \\ u^2(0) = u^2(1) \end{array} \right.$$

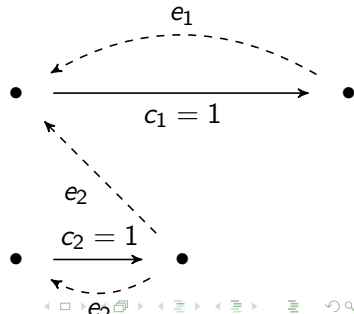


Algorytm przejścia pomiędzy wyżej wymienionymi problemami

KROK 2 Tworzymy nowy hipergraf dzieląc krawędzie ponownie na odcinki o długości jeden, wprowadzamy nowe warunki brzegowe oraz nowe funkcje gęstości jako obciążenia funkcji wcześniej istniejących do odpowiednich przedziałów.

Przykład Po pierwszym kroku mamy układ:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{\tau}^1 = -u_{y_1}^1, \quad t > 0, \quad y_1 \in (0, 2) \\ u_{\tau}^2 = -u_{y_2}^2, \quad t > 0, \quad y_2 \in (0, 1) \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{f} \\ u^1(0) = u^1(2) + u^2(1) \\ u^2(0) = u^2(1) \end{array} \right.$$

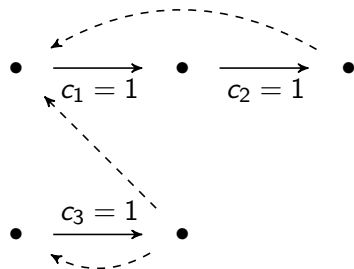


Algorytm przejścia pomiędzy wyżej wymienionymi problemami

KROK 2 Tworzymy nowy hipergraf dzieląc krawędzie ponownie na odcinki o długości jeden, wprowadzamy nowe warunki brzegowe oraz nowe funkcje gęstości jako obciążenia funkcji wcześniej istniejących do odpowiednich przedziałów.

Przykład Długości krawędzi ponownie są jednostkowe:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_\tau = -\mathbf{v}_y, \quad t > 0, \quad y \in (0, 1) \\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{f} \\ \mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}(1) \end{array} \right.$$



Rozważmy przeskalowaną półgrupę $(e^{t\tilde{A}})_{t \geq 0}$ zdefiniowaną jako $e^{t\tilde{A}} = e^{-s(A)t} e^{tA}$ i generowaną przez $\tilde{A} = A - s(A)I$ na dziedzinie $D(\tilde{A}) = D(A)$. W przypadku problemu niezaburzonego ze stałymi prędkościami na krawędziach równymi c , $s(A) = c \ln \|\mathbb{K}\|$. W ogólnym przypadku nie da się zapisać ograniczenia spektralnego operatora A w sposób jawny, lecz jest ono rozwiązaniem równania wielomianowego, którego współczynniki zależą od wyrazów macierzy $\mathbb{C}, \mathbb{M}, \mathbb{K}$.

Definicja (cykl w hipergrafie)

$n + 1$ wierzchołków $v_0 v_1 v_2 \dots v_n$, $v_i \in V$, $i = 0, 1, \dots, n$ nazywamy cyklem o długości n w hipergrafie $G = (V, E)$, jeżeli $v_0 = v_n$ oraz dla dowolnej pary $v_i v_{i+1}$ dla $i = 0, 1, \dots, n - 1$ istnieje taka hiperkrawędź $e \in E = (v_i, F)$, że $v_{i+1} \in F$.

Twierdzenie (asymptotyka długoczasowa)

Jeżeli macierz \mathbb{K} w problemie (6) jest nieredukowalna, a prędkości transportu c_i , $i = 1, 2, \dots, m$ współmierne to możliwy jest rozkład przestrzeni X na dwie domknięte podprzestrzenie niezmiennicze X_1, X_2 mające następujące własności:

- ❶ półgrupa $(e^{t\tilde{A}}|_{X_1})_{t \geq 0}$ jest asymptotycznie stabilna;
- ❷ półgrupa $(e^{t\tilde{A}}|_{X_2})_{t \geq 0}$ jest izomorficzna z półgrupą obrotów o okresie

$$\tau = \frac{1}{c} NWD \left\{ c \sum_j \frac{1}{c_{ij}} : e_{i_1}, \dots, e_{i_k} \text{ tworzą cykl w hipergrafie } G \right\},$$

gdzie $c \in \mathbb{R}$ jest dowolną stałą taką, że $\frac{c}{c_i} \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Tradycyjny model rozprzestrzeniania mutacji genetycznych oparty na równinach bilansu masy zakładał podział organizmów na m grup ze względu na pewną cechę kodu genetycznego:

$$\mathbf{v}' = \mathbb{L}\mathbf{v},$$

gdzie $\mathbf{v} = [\mathbf{v}_1(\mathbf{t}), \mathbf{v}_2(\mathbf{t}), \dots, \mathbf{v}_m(\mathbf{t})]$ opisuje liczebność organizmów w i -tej grupie w ustalonej chwili czasu t , natomiast $\mathbb{L} = (l_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$ jest macierzą współczynników przejścia z jednej grupy do drugiej w wyniku mutacji genów.

Rozróżnijmy osobniki ze względu na wiek utożsamiając starzenie organizmów z przemieszczaniem wzdłuż krawędzi hipergrafu.

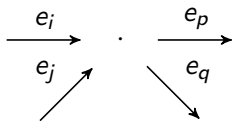
Zakładamy, że wszystkie komórki z danej grupy mają tę samą przewidywaną długość życia. Różne prędkości przepływu przez krawędziach rozróżniają te wartości w obrębie różnych grup.

Komórki w momencie osiągnięcia końca krawędzi rozmnażają się i w tym momencie możliwa jest mutacja z powodu błędu replikacji DNA. Możliwe są mutacje wynikające z zewnętrznych mutagenów w dowolnej chwili życia komórki, co modeluje macierz \mathbb{M} .

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t &= -\mathbb{C}\mathbf{u}_x + \mathbb{M}\mathbf{u}, & \mathbf{u}(0) = \mathbf{f} \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbb{K}\mathbf{u}(1) \end{cases}$$

Prowadzenie rozważań na hipergrafach jest istotnym założeniem. Zgodnie z poniższym przykładem ograniczenie się jedynie do grafów sprawi, że mutacje w grupie i wymuszają charakter mutacji w grupie j .

$$\begin{array}{c}
 p \\
 q
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 & & i & & j & & \\
 \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\
 \cdot & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & \cdot \\
 \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\
 \cdot & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & \cdot \\
 \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot
 \end{bmatrix}$$



Jeżeli współczynniki $k_{pi} = k_{qi} = k_{pj} = 1$, to aby problem był grafowo realizowalny $k_{qj} = 1$.

Jaka jest zależność pomiędzy dwoma podejściami do problemu rozprzestrzeniania mutacji?

Model dany równaniem różniczkowym zwyczajnym jest modelem w skali makro. Poprzez dodanie dodatkowych informacji, wprowadzających zależność od struktury wiekowej, tworzymy bardziej szczegółowy opis. Wprowadzone dane te mogą jednak wpływać na jakościowe zachowanie w skali makro czyli istotnie zaburzyć zachowanie układu. Zachodzi pytanie przy jakich założeniach oba modele opisują tę samą dynamikę w skali makro.

Chcąc zbadać czy dwa modele opisują to samo zjawisko możemy:

- 1 Zidentyfikować różne skale czasowe występujące w mikromodelu. Najczęściej zjawiska w skali mikro występują znacznie częściej lecz trwają krótko.
- 2 Rozróżnić dwa rodzaje parametrów odpowiadające makro i mikro charakterystyce układu.
- 3 Sprawdzić, czy przyrównując małe parametry do zera (dla układów regularnie zaburzonych), bądź badając asymptotykę rozwiązań, gdy te parametry zbiegają do zera (dla układów osobliwie zaburzonych) otrzymamy model, zachowujący makro parametry takie, jak wielkość populacji.

Przekształćmy problem do rodziny problemów dla $\varepsilon > 0$:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t &= -\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{C} \mathbf{u}_x + \mathbf{M} \mathbf{u}, & \mathbf{u}(0) = \mathbf{f} \\ \mathbf{u}(0) &= (\mathbf{I} + \varepsilon \mathbf{B}) \mathbf{u}(1) \end{cases} \quad (6)$$

Rozróżniamy tym samym dwie przyczyny mutacji - powstające w wyniku błędów w replikacji (oznaczona w modelu przez macierz \mathbb{B}) oraz te związane z zewnętrznymi mutagenami (macierz \mathbb{M}). Zakładamy przy tym, że replikacja modelowanych komórek występuje wielokrotnie w wybranej jednostce pomiarowej, a mutacje podczas replikacji zdarzają się relatywnie rzadko.

Twierdzenie (asymptotyczne grupowanie stanów)

Dla dowolnego $T \in (0, \infty)$ istnieje stała $C(T, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \mathbb{M})$ taka, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ oraz warunku początkowego $\mathbf{\hat{u}} \in \mathbf{W}_1^1([0, 1])$ rozwiązanie $\mathbf{u}_\varepsilon(x, t) = \left[e^{t\mathbf{A}_\varepsilon} \mathbf{\hat{u}} \right] (x)$ zagadnienia transportu na hipergrafie (6), w którym prędkości ruchu po krawędziach są współmierne, spełnia warunek

$$\left\| \int_0^1 \mathbf{u}_\varepsilon(x, t) dx - \mathbf{v}(t) \right\|_{\mathbb{R}^m} \leq \varepsilon C(T, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \mathbb{M}) \|\mathbf{\hat{u}}\|_{\mathbf{L}^1([0, 1])},$$

jednostajnie na $[0, T]$, gdzie \mathbf{v} jest rozwiązaniem układu:

$$\begin{cases} \mathbf{v}'(t) &= (\mathbb{C}\mathbb{B} + \mathbb{M}) \mathbf{v}(t), \\ \mathbf{v}(0) &= \mathcal{P}\mathbf{\hat{u}}. \end{cases} \quad (7)$$

Uwaga

Jeżeli w problemie transportowym rozważymy warunek początkowy stały na każdej z krawędzi, to rozwiązanie problemu (6) zbiega według normy do rozwiązania zagadnienia (7). Dla pozostałych warunków początkowych taka zbieżność nie zachodzi.

Podsumowanie

- Model transportowy na hipergrafie metrycznym jest sensownym uogólnieniem modelu opartego na układzie równań różniczkowych zwyczajnych, gdyż zachowuje on makro charakterystykę modelu, jaką jest całkowita masa osobników w każdej z grup.

- Wzbogacenie modelu o informacje w skali mikro powoduje zmianę postaci rozwiązania, co sugeruje, że w przypadku warunków początkowych niebędących funkcjami stałymi na krawędziach warto stosować model o bardziej skomplikowanej dynamice.
- Zastosowanie prostszego modelu w przypadku modelu rozprzestrzeniania mutacji jest sensowne o ile przyjmujemy stałą liczebność populacji oraz częstość reprodukcji jest odpowiednio duża w badanym horyzoncie czasowym.

- J. Banasiak, A. Falkiewicz, P. Namayanja, Asymptotic state lumping in transport and diffusion problems on networks with applications to population problems (2016) M3AS, Vol. 26, No. 2, 215-247
- J. Banasiak, A. Falkiewicz, Some transport and diffusion processes on networks and their graph realizability, (2015) Appl.Math.Letters, No. 45, 25-30
- J. Banasiak, A. Falkiewicz, P. Namayanja, Semigroup approach to diffusion and transport problems on networks (2015) Semigroup Forum, DOI 10.1007/s00233-015-9730-4

- J. Banasiak, A. Falkiewicz, A singular limit for an age structured mutation problem, złożony do Mathematical Biosciences and Engineering
- Taczanowska K, Zięba A, Brandenburg C, Muhar A, Preisel H, Zięba S, Krzeptowski J, Hibner J, Makaruk W, Sostmann H, Graf C, Benitez R, Bolos V, Gonzalez LM, Garcia X, Toca-Herrera JL, Ziobrowski S (2015) Czesko-przestrzenne rozmieszczenie ruchu turystycznego w rejonie kopuły Kasprowego Wierchu w sezonie letnim 2014. V Konferencja "Przyroda Tatrzańskiego Parku Narodowego a Człowiek", 24-26.09.2015 Zakopane



Dziękuję za uwagę