

O ludziach, dzięki którym otrzymałem nagrodę im. Hugona Steinhausa

Adam Bobrowski

Politechnika Lubelska

Miałem szczęście spotkać właściwych ludzi ...

Jan Kisiński:

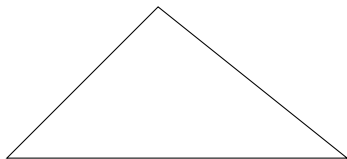
Na studiach uczyli mnie analitycy: Mieczysław Biernacki, Adam Bielecki, Krzysztof Tatarkiewicz, Jan Krzyż, Konstanty Radziszewski. Wszyscy oni mieli szerokie horyzonty intelektualne, nie tylko matematyczne. Gdyby nie *to* (...) zapewne niczego bym nie rozumiał i ewentualny mój potencjał matematyczny zostałby wygaszony.

Prehistoria

- Jerzy Futymski (szkoła podstawowa)
- Marian Wlezień (liceum)

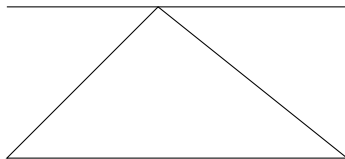
Prehistoria

- Jerzy Futymski (szkoła podstawowa)
- Marian Wlezień (liceum)



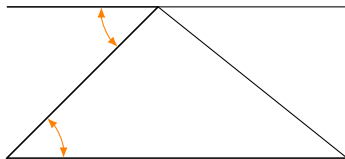
Prehistoria

- Jerzy Futymski (szkoła podstawowa)
- Marian Wlezień (liceum)



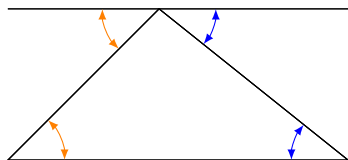
Prehistoria

- Jerzy Futymski (szkoła podstawowa)
- Marian Wlezień (liceum)

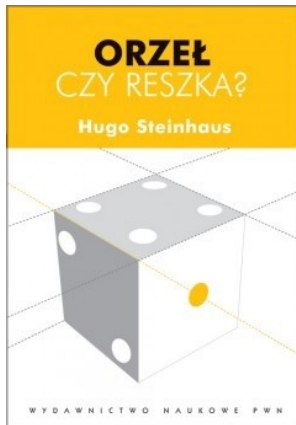


Prehistoria

- Jerzy Futymski (szkoła podstawowa)
- Marian Wlezień (liceum)



Hugo Dyonizy Steinhaus



Studia na UMCS

Zdzisław Rychlik, Tadeusz Leżański, Adam Bielecki



Andrzej Lasota (1932-2006)



Andrzej Lasota

- Kawiarnia Szkocka → Witold Mozgawa → Andrzej Lasota.

Andrzej Lasota

- Kawiarnia Szkocka → Witold Mozgawa → Andrzej Lasota.
- Teoria kategorii Baire'a? Nie: $e^{t \frac{d}{dx}}$.

Andrzej Lasota

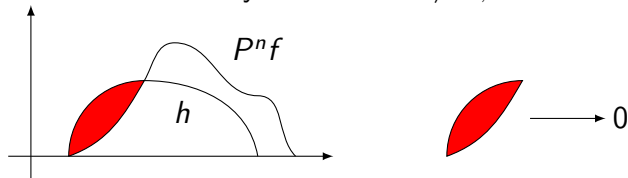
- Kawiarnia Szkocka \rightarrow Witold Mozgawa \rightarrow Andrzej Lasota.
- Teoria kategorii Baire'a? Nie: $e^{t \frac{d}{dx}}$.
- Zbiór gęstości $D: f \in D \iff f \geq 0$ and $\int f = 1$.

Andrzej Lasota

- Kawiarnia Szkocka \rightarrow Witold Mozgawa \rightarrow Andrzej Lasota.
- Teoria kategorii Baire'a? Nie: $e^{t \frac{d}{dx}}$.
- Zbiór gęstości $D: f \in D \iff f \geq 0$ and $\int f = 1$.
- Operator Markowa: $f \in D \Rightarrow Pf \in D$.

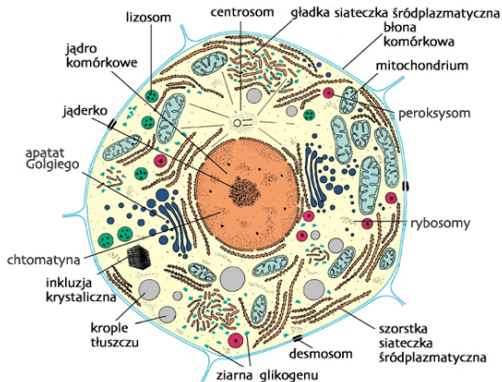
Andrzej Lasota

- Kawiarnia Szkocka \rightarrow Witold Mozgawa \rightarrow Andrzej Lasota.
- Teoria kategorii Baire'a? Nie: $e^{t \frac{d}{dx}}$.
- Zbiór gęstości $D: f \in D \iff f \geq 0$ and $\int f = 1$.
- Operator Markowa: $f \in D \Rightarrow Pf \in D$.
- Twierdzenie Lasoty–Yorke'a: $\exists h \neq 0, h \geq 0 \forall f \in D$



$$\Rightarrow \exists f_* \in D \forall f \in D, \|P^n f - f_*\| = \int |P^n f - f| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Zastosowania w biologii:



Zródło: Encyklopedia PWN

Jan Maria Kisyński



Jan Maria Kisyński (1)

Probabilistyczny wzór na rozwiązanie równania telegrafu:

$$u_{tt} + 2au_t = \nu^2 u_{xx}, \quad u(0, x) = u_0(x), u_x(0, x) = 0.$$

Jan Maria Kisyński (1)

Probabilistyczny wzór na rozwiązanie równania telegrafu:

$$u_{tt} + 2au_t = \nu^2 u_{xx}, \quad u(0, x) = u_0(x), \quad u_x(0, x) = 0.$$

$$(a = 0) \quad u(t, x) = \frac{1}{2}(u_0(x + \nu t) + u_0(x - \nu t)), \quad x, t \in \mathbb{R};$$

$$(a > 0) \quad u(t, x) = \frac{1}{2}E(u_0(x + \nu\xi_a(t)) + u_0(x - \nu\xi_a(t))), \quad x, t \in \mathbb{R};$$

tu:

$$\xi_a(t) = \int_0^t (-1)^{N_a(s)} ds, \quad P(N_a(t) = k) = e^{-at} \frac{(at)^k}{k!}.$$

Jan Maria Kisyński (1)

Probabilistyczny wzór na rozwiązanie równania telegrafu:

$$u_{tt} + 2au_t = \nu^2 u_{xx}, \quad u(0, x) = u_0(x), u_x(0, x) = 0.$$

$$(a = 0) \quad u(t, x) = \frac{1}{2}(u_0(x + \nu t) + u_0(x - \nu t)), \quad x, t \in \mathbb{R};$$

$$(a > 0) \quad u(t, x) = \frac{1}{2}E(u_0(x + \nu\xi_a(t)) + u_0(x - \nu\xi_a(t))), \quad x, t \in \mathbb{R};$$

tu:

$$\xi_a(t) = \int_0^t (-1)^{N_a(s)} ds, \quad P(N_a(t) = k) = e^{-at} \frac{(at)^k}{k!}.$$

Klucz do dowodu: $(\xi_a(t), (-1)^{N_a(t)})$ – proces Levy'ego w grupie $\mathbb{R} \times \{-1, 1\}$ z mnożeniem $(x, k)(y, \ell) = (x\ell + k, k\ell)$.

Jan Maria Kisyński (2)

Algebraiczna wersja twierdzenia H-Y:

Tw. Hille'a–Yosidy

Domknięty i gęsto określony operator A ma funkcję wykładniczą złożoną z operatorów kontrakcji, to znaczy

$$\|e^{tA}\| \leq 1$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\| \leq 1, \lambda > 0$.

Jan Maria Kisyński (2)

Algebraiczna wersja twierdzenia H-Y:

Tw. Hille'a–Yosidy

Domknięty i gęsto określony operator A ma funkcję wykładniczą złożoną z operatorów kontrakcji, to znaczy

$$\|e^{tA}\| \leq 1$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\| \leq 1, \lambda > 0$.

Co jeśli A nie ma gęstej dziedziny (a oszacowanie jest spełnione)?

Jan Maria Kisyński (2)

Algebraiczna wersja twierdzenia H-Y:

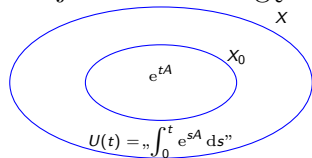
Tw. Hille'a–Yosidy

Domknięty i gęsto określony operator A ma funkcję wykładniczą złożoną z operatorów kontrakcji, to znaczy

$$\|e^{tA}\| \leq 1$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\| \leq 1, \lambda > 0$.

Co jeśli A nie ma gęstej dziedziny (a oszacowanie jest spełnione)?



Jan Maria Kisyński (2)

Algebraiczna wersja twierdzenia H-Y:

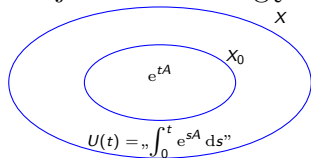
Tw. Hille'a–Yosidy

Domknięty i gęsto określony operator A ma funkcję wykładniczą złożoną z operatorów kontrakcji, to znaczy

$$\|e^{tA}\| \leq 1$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\| \leq 1, \lambda > 0$.

Co jeśli A nie ma gęstej dziedziny (a oszacowanie jest spełnione)?



$$H(\phi) = \text{„}\int_0^\infty e^{tA}\phi(t) dt\text{”}$$

$$x \in X_0 \iff x = H(\phi)y$$

$$e^{tA}x = H(\phi_t)y$$

Jan Maria Kisyński (3)

Trotter–Kato–Neveu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{tA_n} = e^{tA} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda - A_n)^{-1} = (\lambda - A)^{-1}.$$

Jan Maria Kisyński (3)

Trotter–Kato–Neveu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{tA_n} = e^{tA} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda - A_n)^{-1} = (\lambda - A)^{-1}.$$

Kisyński:

Twierdzenie Trottera–Kato w przestrzeni \mathbb{X} to twierdzenie Hille'a–Yosidy w $c(\mathbb{X})$.

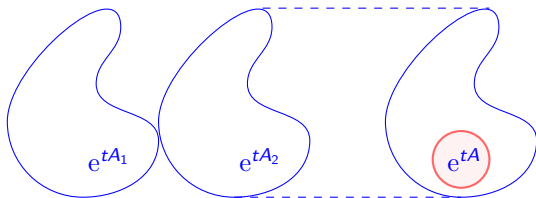
Jan Maria Kisyński (3)

Trotter–Kato–Neveu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{tA_n} = e^{tA} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda - A_n)^{-1} = (\lambda - A)^{-1}.$$

Kisyński:

Twierdzenie Trottera–Kato w przestrzeni \mathbb{X} to twierdzenie Hille'a–Yosida w $c(\mathbb{X})$.



$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{tA_n} x = e^{tA} P x, \quad t > 0, x \in \mathbb{X}.$$

Doktorat: dwa przykłady

1. Równanie telegrafu

$$u_{tt} + 2au_t = v^2 u_{xx}.$$

Doktorat: dwa przykłady

1. Równanie telegrafu

$$u_{tt} + 2au_t = v^2 u_{xx}.$$

Jeśli $2a = 2v^2 = \epsilon^{-1}$, to

$$\epsilon u_{tt} + u_t = u_{xx} \quad \rightarrow \quad u_t = \frac{1}{2} u_{xx}.$$

Dwa warunki początkowe, w granicy jeden.

Doktorat: dwa przykłady

1. Równanie telegrafu

$$u_{tt} + 2au_t = v^2 u_{xx}.$$

Jeśli $2a = 2v^2 = \epsilon^{-1}$, to

$$\epsilon u_{tt} + u_t = u_{xx} \quad \rightarrow \quad u_t = \frac{1}{2} u_{xx}.$$

Dwa warunki początkowe, w granicy jeden.

2. Elastyczne ruchy Browna na prawej półosi:

$$\mathbb{X} = C[0, \infty], A_\epsilon f = \frac{1}{2} f'', f(0) = \epsilon f'(0).$$

Doktorat: dwa przykłady

1. Równanie telegrafu

$$u_{tt} + 2au_t = v^2 u_{xx}.$$

Jeśli $2a = 2v^2 = \epsilon^{-1}$, to

$$\epsilon u_{tt} + u_t = u_{xx} \quad \rightarrow \quad u_t = \frac{1}{2} u_{xx}.$$

Dwa warunki początkowe, w granicy jeden.

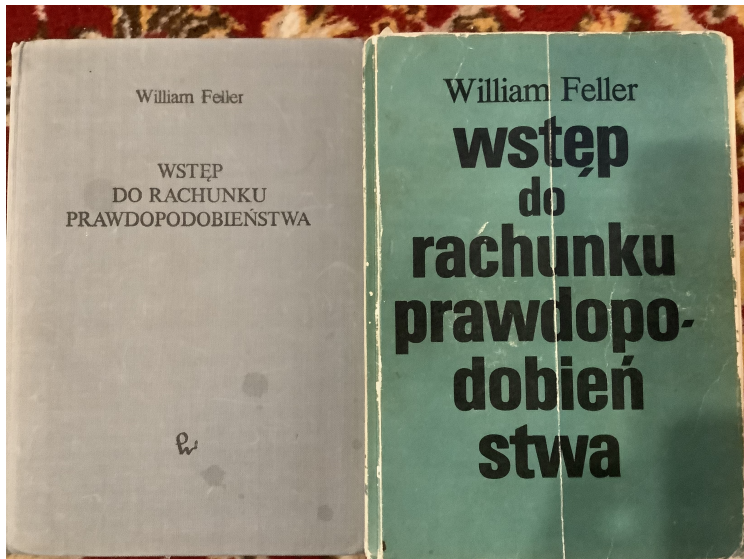
2. Elastyczne ruchy Browna na prawej półosi:

$$\mathbb{X} = C[0, \infty], A_\epsilon f = \frac{1}{2} f'', f(0) = \epsilon f'(0).$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{tA_\epsilon} = e^{tA_0};$$

A_0 minimalny ruch Browna na prawej półosi.

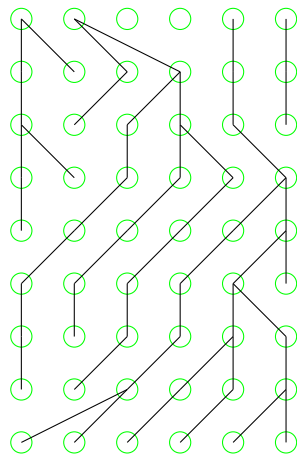
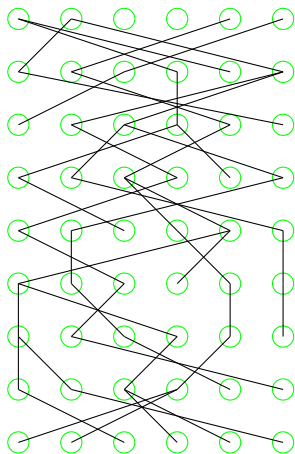
William Feller



Marek Kimmel



Marek Kimmel



$$u_t = A \cdot u + u \cdot A + \frac{1}{2N(t)} \Theta u,$$

$$u_t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} ??$$

Tomasz Lipniacki

Stochastyczna ekspresja genów:

- Stan komórki:

$(x, y, \gamma) = (\text{poziom mRNA}, \text{poziom białka}, \# \text{ akt. genów}).$

- Dynamika (stałe $a, b, r > 0$ i funkcje α, β dane):

$$\frac{dx}{dt} = \gamma - x, \quad \frac{dy}{dt} = r(x - y), \quad 0 \xrightleftharpoons[b\beta(x,y)]{a\alpha(x,y)} 1.$$

Tomasz Lipniacki

Stochastyczna ekspresja genów:

- Stan komórki:

$(x, y, \gamma) = (\text{poziom mRNA}, \text{poziom białka}, \# \text{ akt. genów}).$

- Dynamika (stałe $a, b, r > 0$ i funkcje α, β dane):

$$\frac{dx}{dt} = \gamma - x, \quad \frac{dy}{dt} = r(x - y), \quad 0 \xrightleftharpoons[b\beta(x,y)]{a\alpha(x,y)} 1.$$

- Dwie granice:

- $r \rightarrow \infty$:

$$\frac{dx}{dt} = \gamma - x, \quad 0 \xrightleftharpoons[b\beta(x,x)]{a\alpha(x,x)} 1.$$

- $a, b \rightarrow \infty, a/b = c$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c\alpha}{c\alpha + \beta} - x, \quad \frac{dy}{dt} = r(x - y).$$

Jacek Banasiak

- Ekspresja genów: $A, B \rightarrow \alpha A + (1 - \alpha)B$ w C .
- Ławice płaszczek: $G|_{\ker \Phi}, G|_{\ker \Psi} \rightarrow G|_{\Phi\alpha + \Psi(1-\alpha)}$, w L^1 .



Ryszard Rudnicki



- Asymptotyka modelu ekspresji genów.

Ryszard Rudnicki



- Asymptotyka modelu ekspresji genów.
- Model dynamiki szybkich neurotransmiterów; od mikro do makro.
- Opis półprzepuszczalnej membrany:

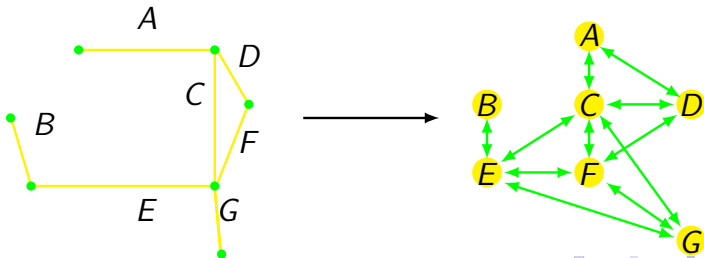
$$f'(0+) = a(f(0+) - f(0-)) \quad f'(0-) = b(f(0+) - f(0-))$$

Ryszard Rudnicki

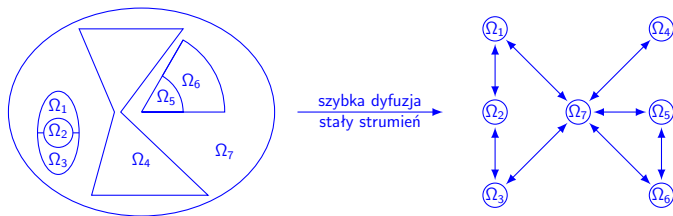


- Asymptotyka modelu ekspresji genów.
- Model dynamiki szybkich neurotransmiterów; od mikro do makro.
- Opis półprzepuszczalnej membrany:

$$f'(0+) = a(f(0+) - f(0-)) \quad f'(0-) = b(f(0+) - f(0-))$$



Zasada uśredniania



Praca z Markusem Kunze i Bogdanem Kaźmierczakiem.
 Bzik na punkcie warunków brzegowych – „zaraziłem się” od Profesora Kiszyńskiego.

Tomasz Lipniacki i Bogdan Kaźmierczak

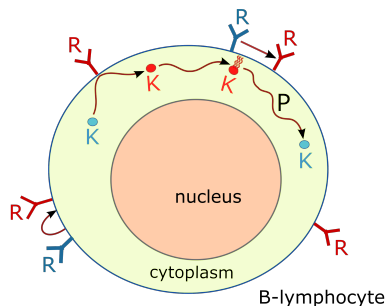
Kinazy dyfundujące w limfocytach typu B.

Równanie podstawowe:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = d\Delta K + f(K),$$

d współczynnik dyfuzji,

f opisuje deaktywację kinaz przez fosfatazy.



Tomasz Lipniacki i Bogdan Kaźmierczak

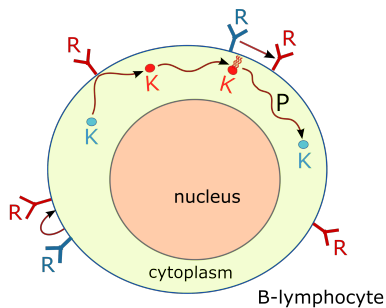
Kinazy dyfundujące w limfocytach typu B.

Równanie podstawowe:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = d\Delta K + f(K),$$

d współczynnik dyfuzji,

f opisuje deaktywację kinaz przez fosfatazy.



Warunek brzegowy:

$$\frac{\partial K}{\partial n} = aR(1 - K), \text{ na zewnątrz,}$$

$$\frac{\partial K}{\partial n} = 0 \quad \text{w środku,}$$

a, R – stałe.

Tomasz Lipniacki i Bogdan Kaźmierczak

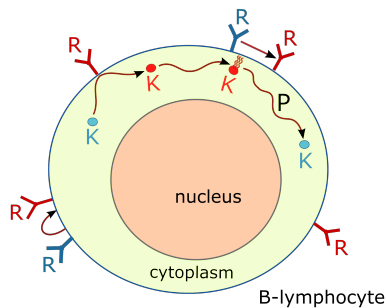
Kinazy dyfundujące w limfocytach typu B.

Równanie podstawowe:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = d\Delta K + f(K),$$

d współczynnik dyfuzji,

f opisuje deaktywację kinaz przez fosfatazy.



Warunek brzegowy:

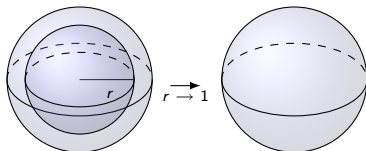
$$\frac{\partial K}{\partial n} = aR(1 - K), \text{ na zewnątrz,}$$

$$\frac{\partial K}{\partial n} = 0 \quad \text{w środku,}$$

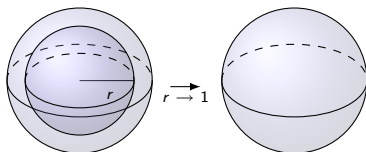
a, R – stałe.

Geometria!

Od „pierścienia” 3D do sfery 3D



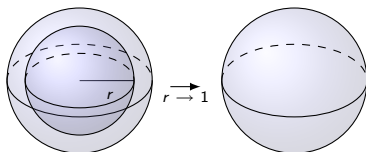
Od „pierścienia” 3D do sfery 3D



Graniczne równanie:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \Delta_{LB} K + aR(1 - K) + f(K).$$

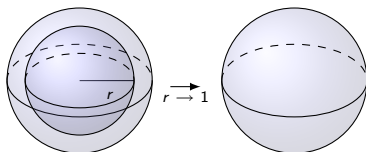
Od „pierścienia” 3D do sfery 3D



Graniczne równanie:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \Delta_{LB} K + aR(1 - K) + f(K).$$

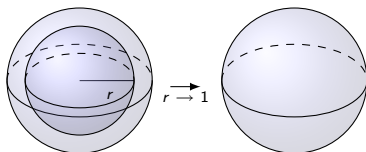
Od „pierścienia” 3D do sfery 3D



Graniczne równanie:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \Delta_{LB} K + aR(1 - K) + f(K).$$

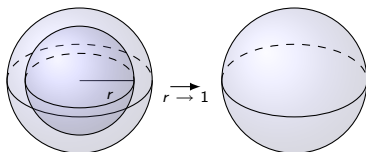
Od „pierścienia” 3D do sfery 3D



Graniczne równanie:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \Delta_{LB} K + aR(1 - K) + f(K).$$

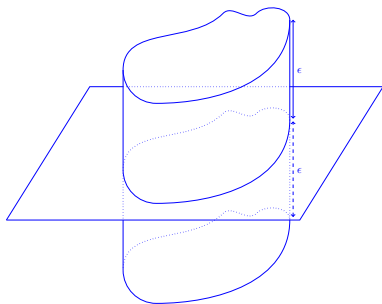
Od „pierścienia” 3D do sfery 3D



Graniczne równanie:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \Delta_{LB} K + aR(1 - K) + f(K).$$

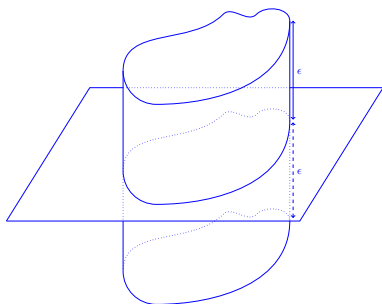
Obszary przedzielone półprzepuszczalną membraną



(Zmiana oznaczeń $K \mapsto u$).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(u), \quad t \geq 0.$$

Obszary przedzielone półprzepuszczalną membraną



(Zmiana oznaczeń $K \mapsto u$).

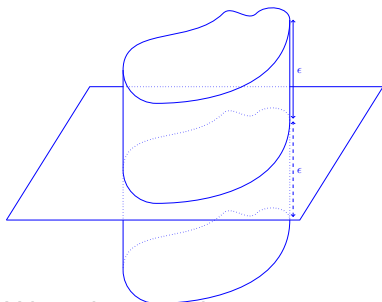
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(u), \quad t \geq 0.$$

Warunki brzegowe:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = c^+ u, \quad (\text{na górze}),$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = c^- u, \quad (\text{na dole}).$$

Obszary przedzielone półprzepuszczalną membraną



Warunki przenikania:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(p+) = \alpha[u(p-) - u(p+)], \quad (\text{z góry w dół}),$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(p-) = \beta[u(p-) - u(p+)], \quad (\text{z dołu w górę}).$$

α, β, c^+, c^- – współczynniki liczbowe lub funkcyjne.

(Zmiana oznaczeń $K \mapsto u$).

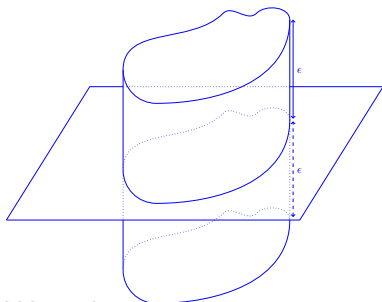
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(u), \quad t \geq 0.$$

Warunki brzegowe:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = c^+ u, \quad (\text{na górze}),$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = c^- u, \quad (\text{na dole}).$$

Obszary przedzielone półprzepuszczalną membraną



Warunki przenikania:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(p+) = \epsilon\alpha[u(p-) - u(p+)], \quad (\text{z góry w dół}),$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(p-) = \epsilon\beta[u(p-) - u(p+)], \quad (\text{z dołu w górę}).$$

α, β, c^+, c^- – współczynniki liczbowe lub funkcyjne.

(Zmiana oznaczeń $K \mapsto u$).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(u), \quad t \geq 0.$$

Warunki brzegowe:

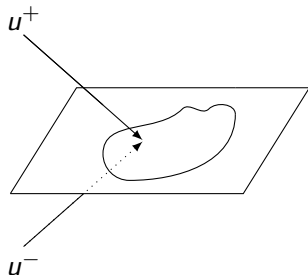
$$\frac{\partial u}{\partial n} = \epsilon c^+ u, \quad (\text{na górze}),$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \epsilon c^- u, \quad (\text{na dole}).$$

Równanie graniczne

Dyfuzja po obu stronach membrany, ze skokami:

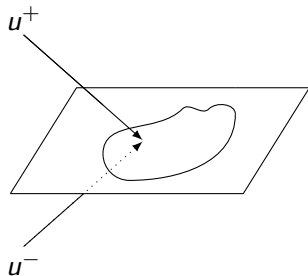
$$\partial_t \begin{pmatrix} u^+ \\ u^- \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \Delta_{2D} & 0 \\ 0 & \Delta_{2D} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u^+ \\ u^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F(u^+) - c^+ u^+ \\ F(u^-) - c^- u^- \end{pmatrix}.$$



Równanie graniczne

Dyfuzja po obu stronach membrany, ze skokami:

$$\partial_t \begin{pmatrix} u^+ \\ u^- \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \Delta_{2D} & 0 \\ 0 & \Delta_{2D} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u^+ \\ u^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F(u^+) - c^+ u^+ \\ F(u^-) - c^- u^- \end{pmatrix}.$$

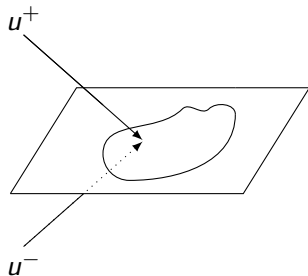


Współczynniki przenikania stają się intensywnościami skoków.

Równanie graniczne

Dyfuzja po obu stronach membrany, ze skokami:

$$\partial_t \begin{pmatrix} u^+ \\ u^- \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \Delta_{2D} & 0 \\ 0 & \Delta_{2D} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u^+ \\ u^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F(u^+) - c^+ u^+ \\ F(u^-) - c^- u^- \end{pmatrix}.$$



Współczynniki przenikania stają się intensywnościami skoków.

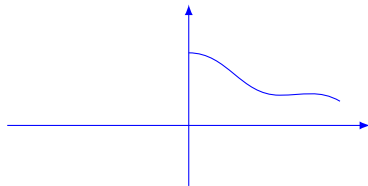
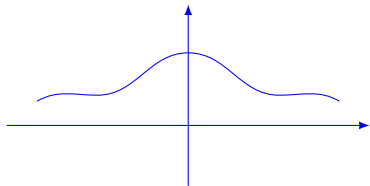
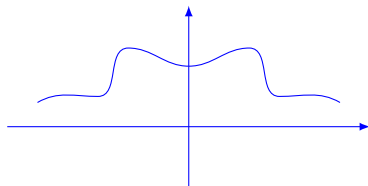
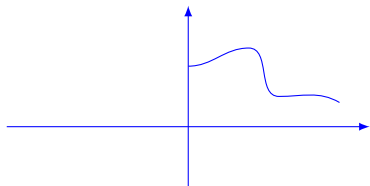
Wrażliwość na zmianę warunków przenikania.

Feller – metoda obrazów Kelvina

$$u_t = \frac{1}{2} u_{xx}, \quad u_x(0, t) = 0.$$



Metoda obrazów w obrazkach



„Skrzywione” obrazy



$$\begin{aligned}
 & au_{xx}(0, t) + bu_x(0, t) + cu(0, t) \\
 & - d \int_{(0, \infty)} u(x, t) d\mu(x) = 0.
 \end{aligned}$$

Ale i w wielu innych zagadnieniach.

Wojtek Chojnacki



- Inspiracje z biologii.
- Teoria operatorowych funkcji kosinusowych.
- Skalarne funkcje kosinusowe są odosobnione.
- Półgrupy są stateczne a kosinusy robią psikusy.

Inni wspaniali (lista zdecydowanie niekompletna):

- Małgorzata i Krzysztof Bogdan
- Tomasz Szarek
- Tomasz Komorowski
- Henryk Leszczyński
- Yura Tomilov
- Dariusz Wrzosek
- Mirosław Lachowicz
- Tadeusz Kuczumow
- Jacek Mięksiz
- Katarzyna Horbacz
- Marta Tyran-Kamińska
- Andrzej Łagodowski
- Radek Bogucki
- Adam Gregosiewicz
- Aleksandra Puchalska
- Elżbieta Ratajczyk
- Andrzej Bieganowski