XXX lecie IMSiM
20-22 kwietnia 2017, Warszawa

III problemy otwarte na XXX-lecie IMSiM

Jacek Miękisz
Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

Akt 1   Kwazikryształy

Nobel z chemii 2011
Dan Shechtman

David Hilbert 1862 - 1943

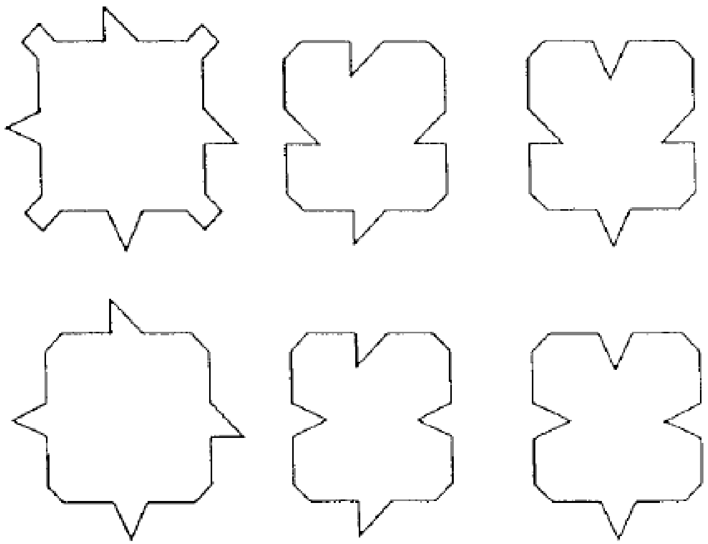
23 problemy, 1900 rok

Problem 18 część druga

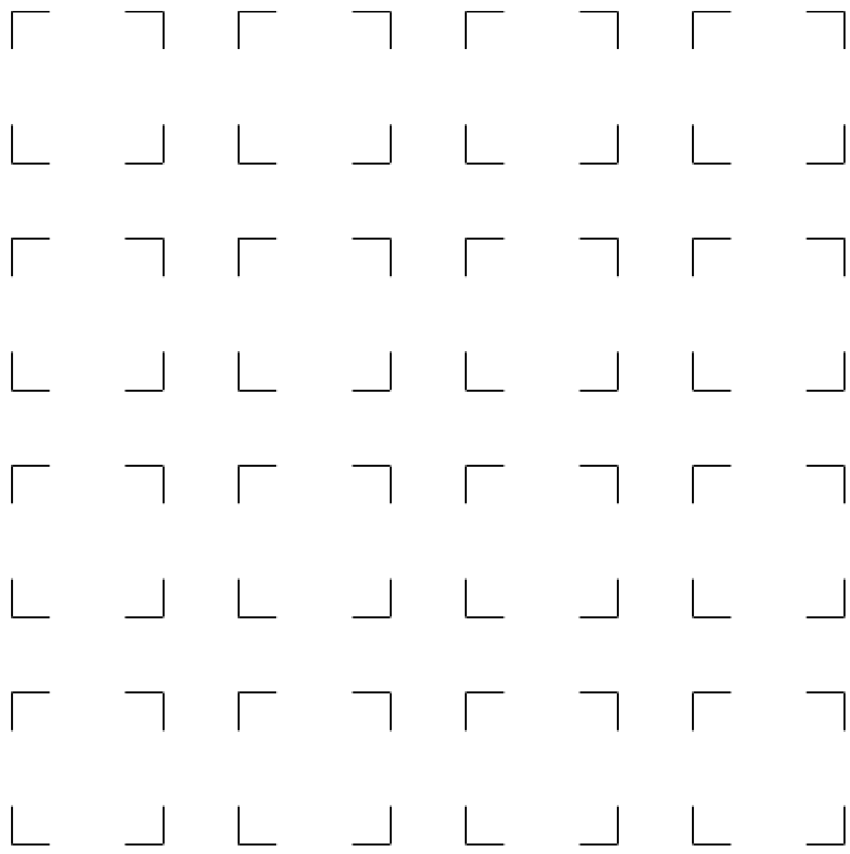
Czy istnieje wielościan, którym można pokryć przestrzeń
ale TYLKO w sposób nieokresowy ?

Raphael Robinson 1911 - 1995

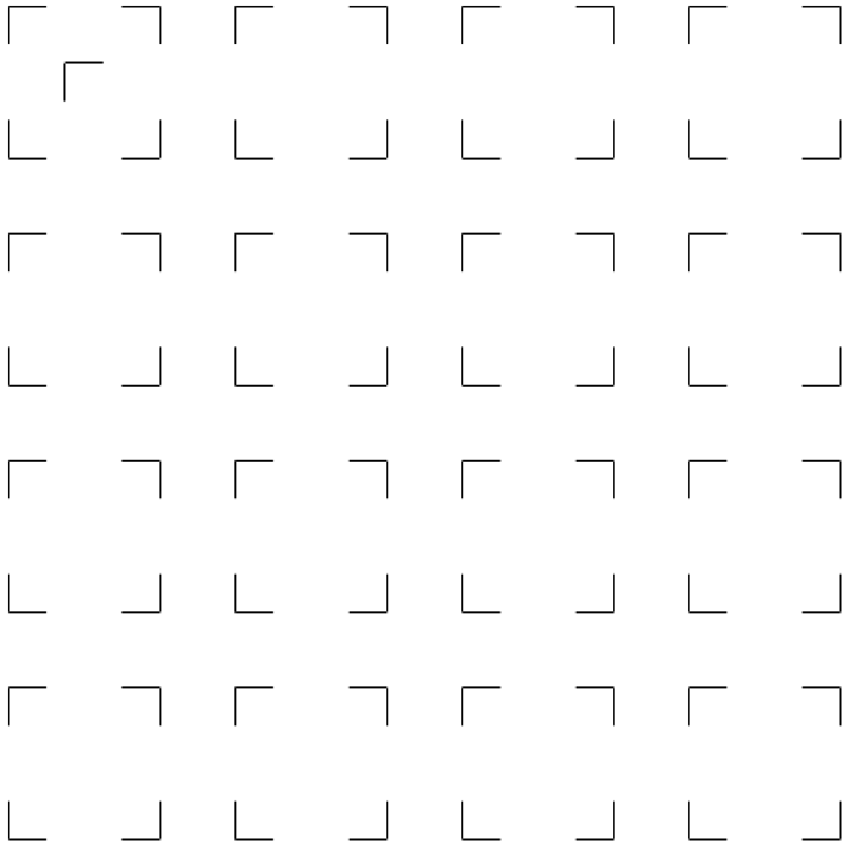
6 (56) kafelków, którymi można pokryć płaszczyznę
ale tylko w sposób nieokresowy, 1971



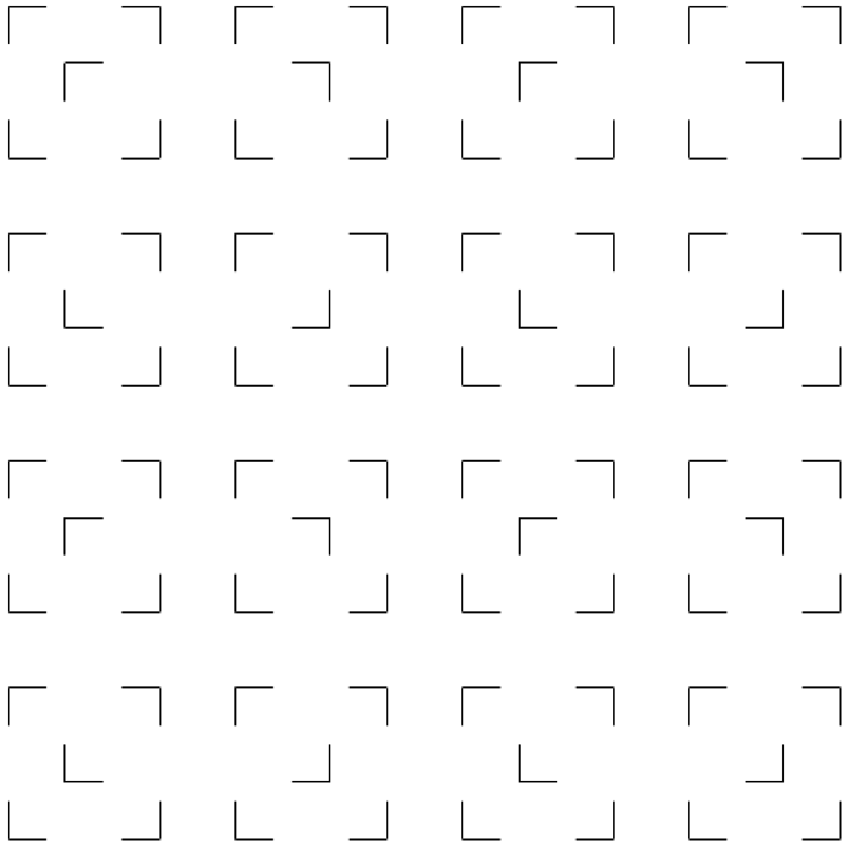
Struktura nieskończonej mozaiki



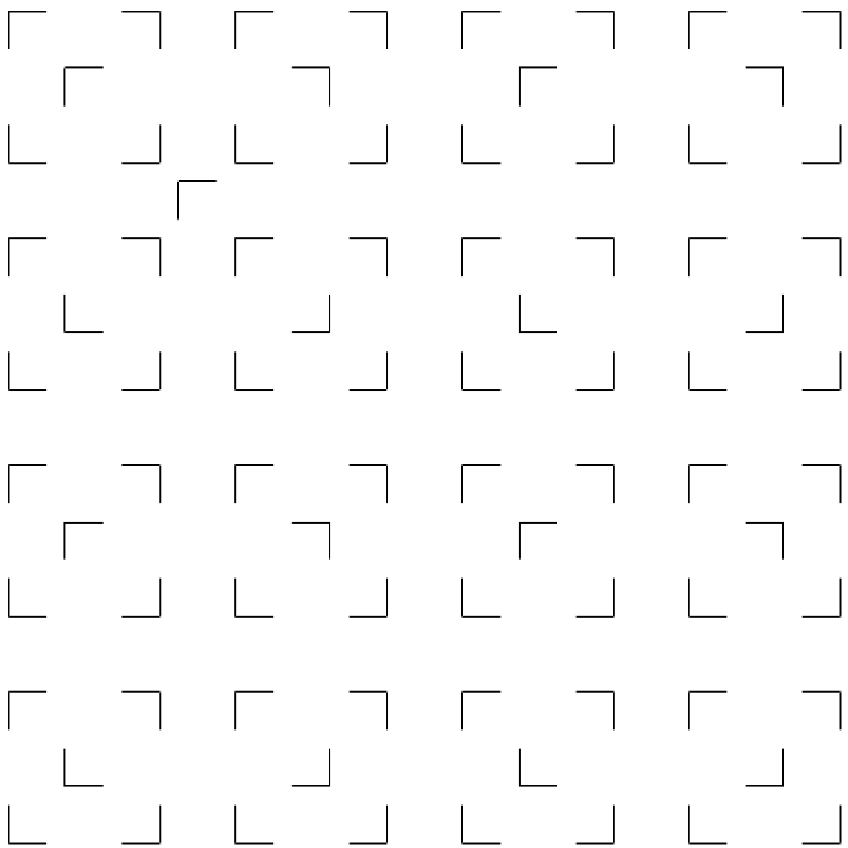
Struktura nieskończonej mozaiki



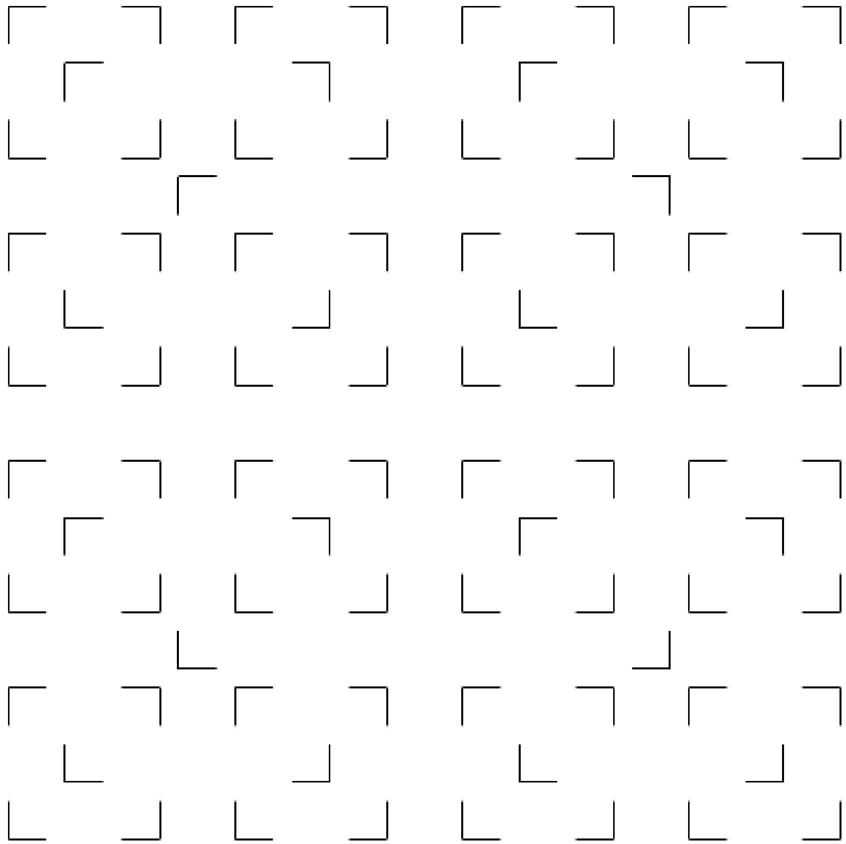
Struktura nieskończonej mozaiki



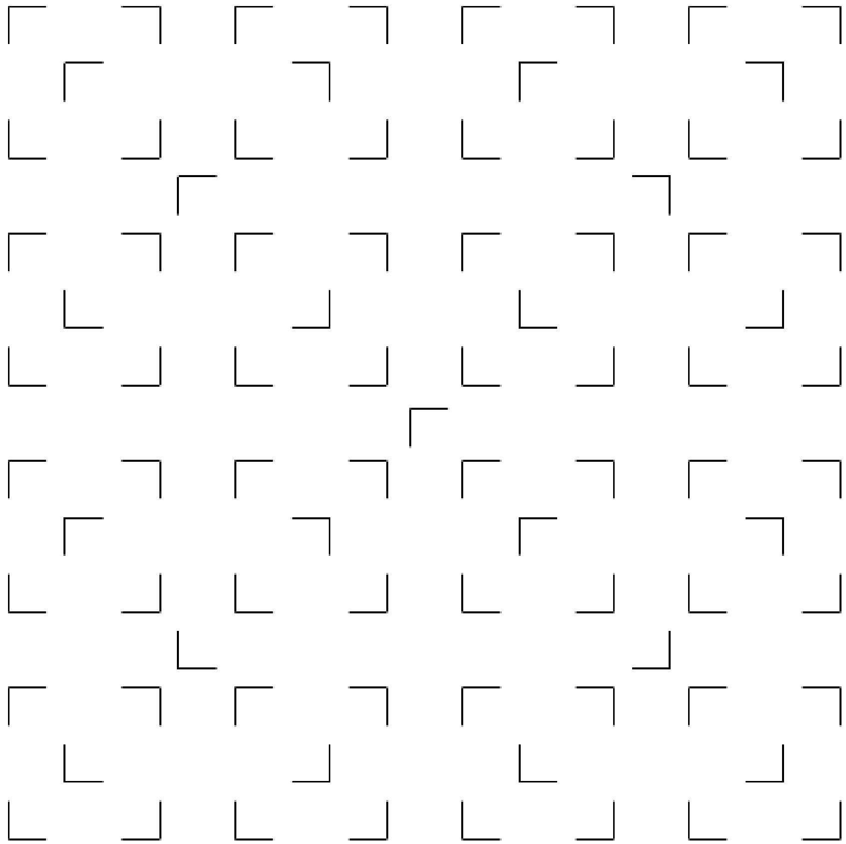
Struktura nieskończonej mozaiki



Struktura nieskończonej mozaiki



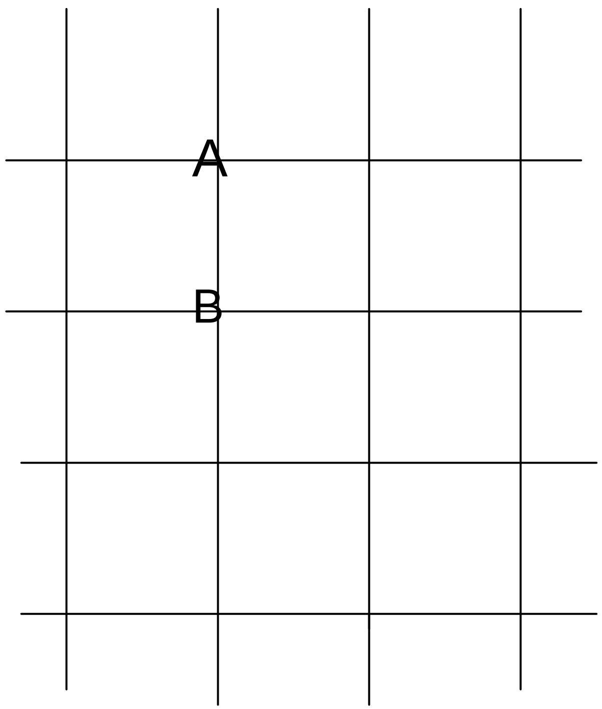
Struktura nieskończonej mozaiki



konfiguracje o okresie 2^{n+1} na podsieci $2^n Z^2$ $n \geq 1$

globalny porządek z lokalnych reguł

Gaz sieciowy z 56 typami cząstek



dachówki –--- cząstki

oddziaływania:
energia A i B = 0, jeśli A i B pasują do siebie
energia A i B = 1, jeśli A i B nie pasują do siebie

stan podstawowy --- mozaika Robinsona

powyższy model oddziałujących cząstek nie posiada okresowego stanu podstawowego

$$\Lambda \subset Z^d \qquad \Omega_\Lambda = \{1, ..., 56\}^\Lambda$$

$$Hamiltonian, \;\; H : \Omega_\Lambda \to R$$

$$\rho(X, T, \Lambda) = \frac{e^{-\frac{H(X)}{T}}}{Q}$$

$$\rho(T, \Lambda) \to \rho(T) \;\; kiedy \;\; \Lambda \to Z^2$$

$\rho(T)$ jest tak zwaną miarą Gibbsa

Problem Otwarty I

Skonstruować układ oddziałujących cząstek,
dla którego minimalizacja energii swobodnej osiągana jest
przez stany równowagowe, tak-zwane miary Gibbsa
na przestrzeni konfiguracji, które w odpowiednio niskich
temperaturach przypisują prawdopodobieństwo bliskie jedności
nieokresowym stanom podstawowym.

Wynik negatywny ale interesujący

Podwajanie okresu, JM, J. Stat. Phys. 1990

Y - mozaika Robinsona

Dla *każdego* $\epsilon > 0$ *istnieje zbiegajacy do zera ciag temperatur* T_n,
taki *że jeśli* $\mathrm{T} \leq T_n$, to $\mu_T^Y(X_i = Y_i) > 1 - \epsilon$, $i \in 2^n Z^2$

Akt 2 Dylemat Więźnia

Kooperowali: Jakub Łącki, Michał Matuszak, Bartosz Sułkowski

Gracze: dwóch podejrzanych
Strategie: Kooperacja, Zdrada
Wypłaty: obniżenie wyroku

	Kooperacja	Zdrada
Kooperacja	3	0
Zdrada	5	1

Jedyna równowaga Nasha = (Zdrada,Zdrada)

Grafy Poissona

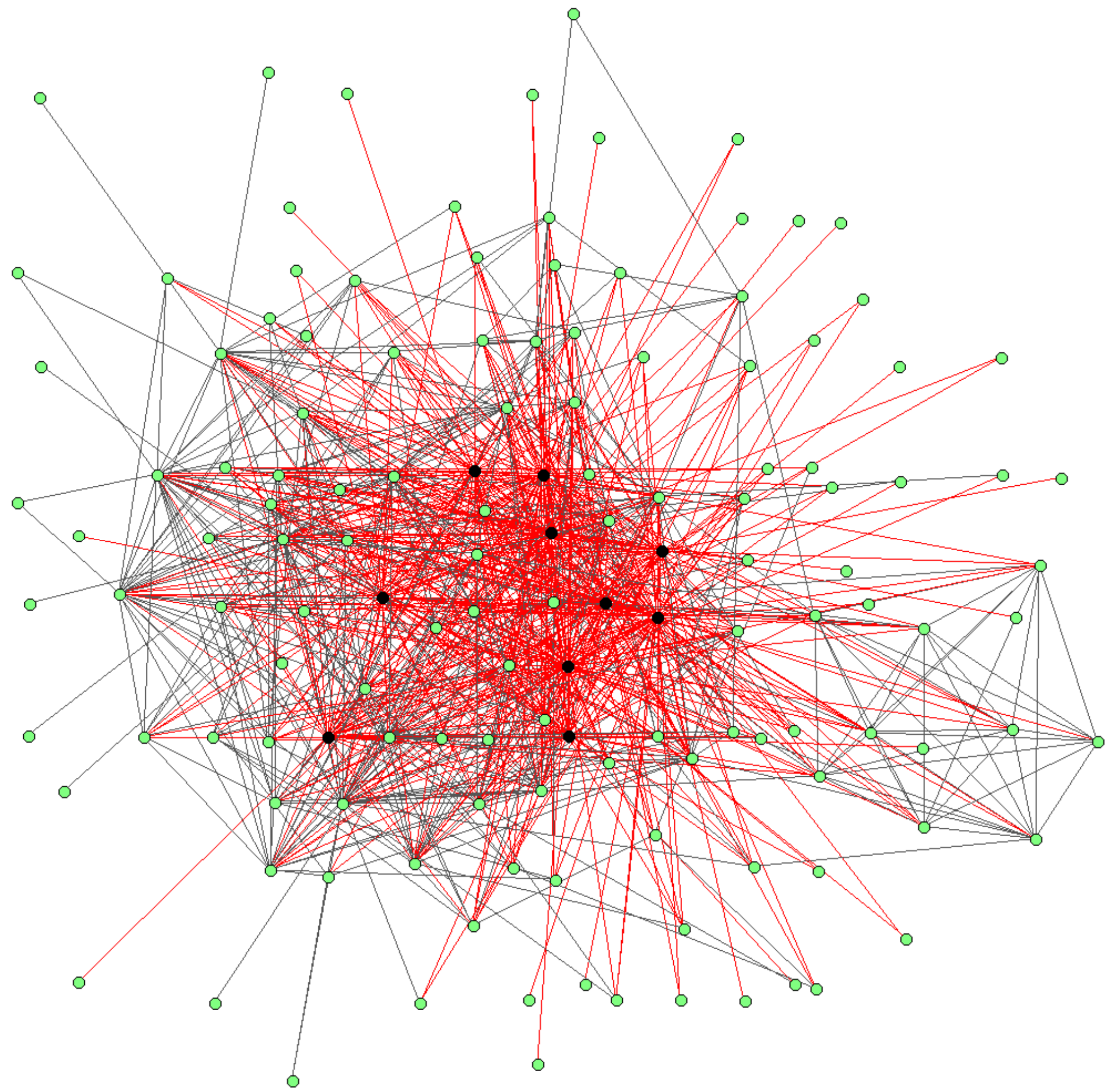
Każdą parę wierzchołków łączymy krawędzią z prawdopodobieństwem ε

Rozkład stopni wierzchołków jest rozkładem Poissona

Bezskalowe grafy typu Barabasi-Alberty

Reguła preferencyjnego linkowania

Rozkład stopni wierzchołków $\sim k^{-\lambda}$



	C	D
C	1	0
D	T	0

	C	D
C	$1-\gamma$	$-\gamma$
D	$T-\gamma$	$-\gamma$

γ - koszt połączenia

dynamika imitacji najlepszej strategii z otoczenia

średni poziom współpracy w stanie stacjonarnym

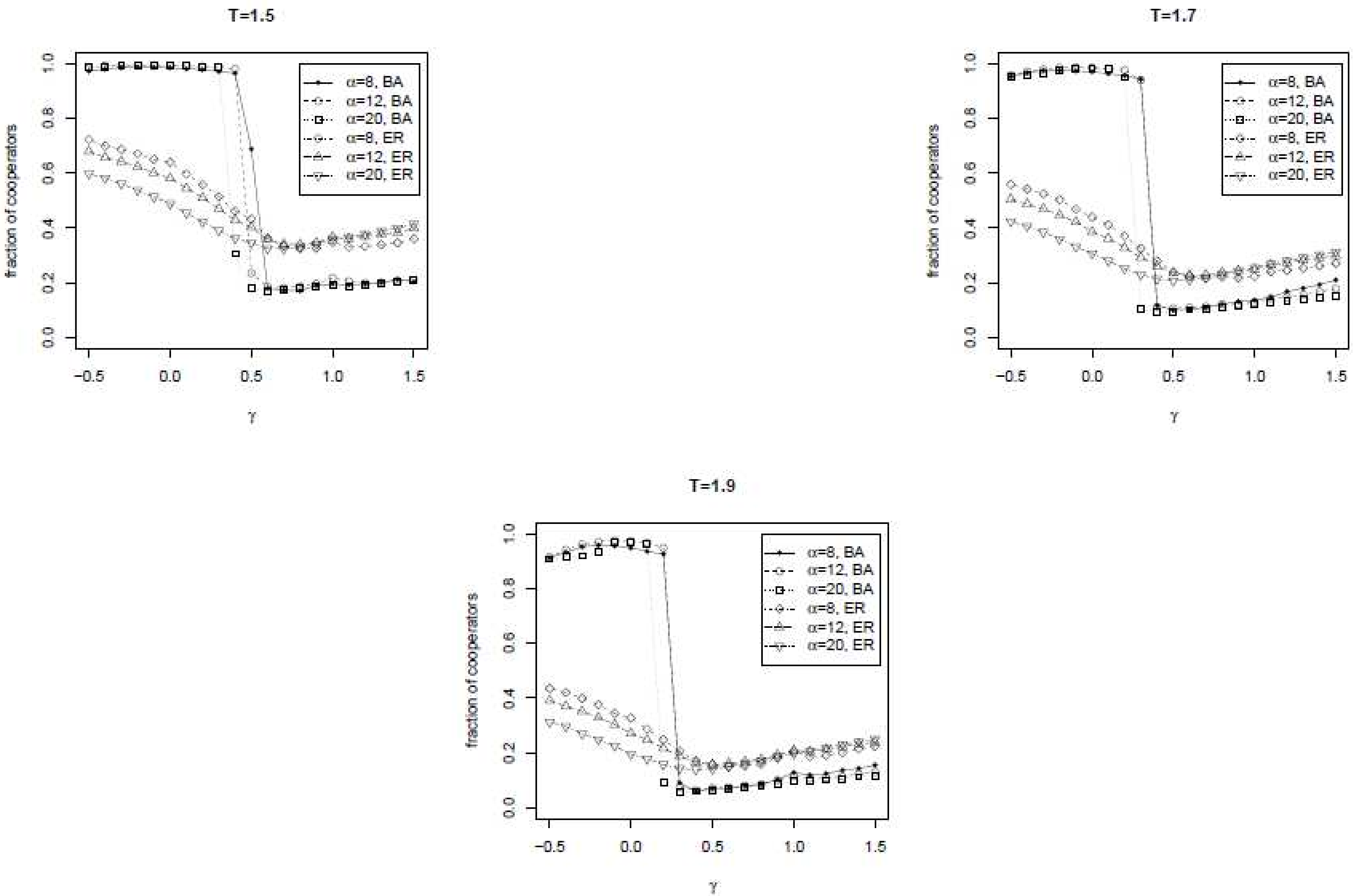


Figure 1: Fractions of cooperators depending on the cost of maintaining a link.

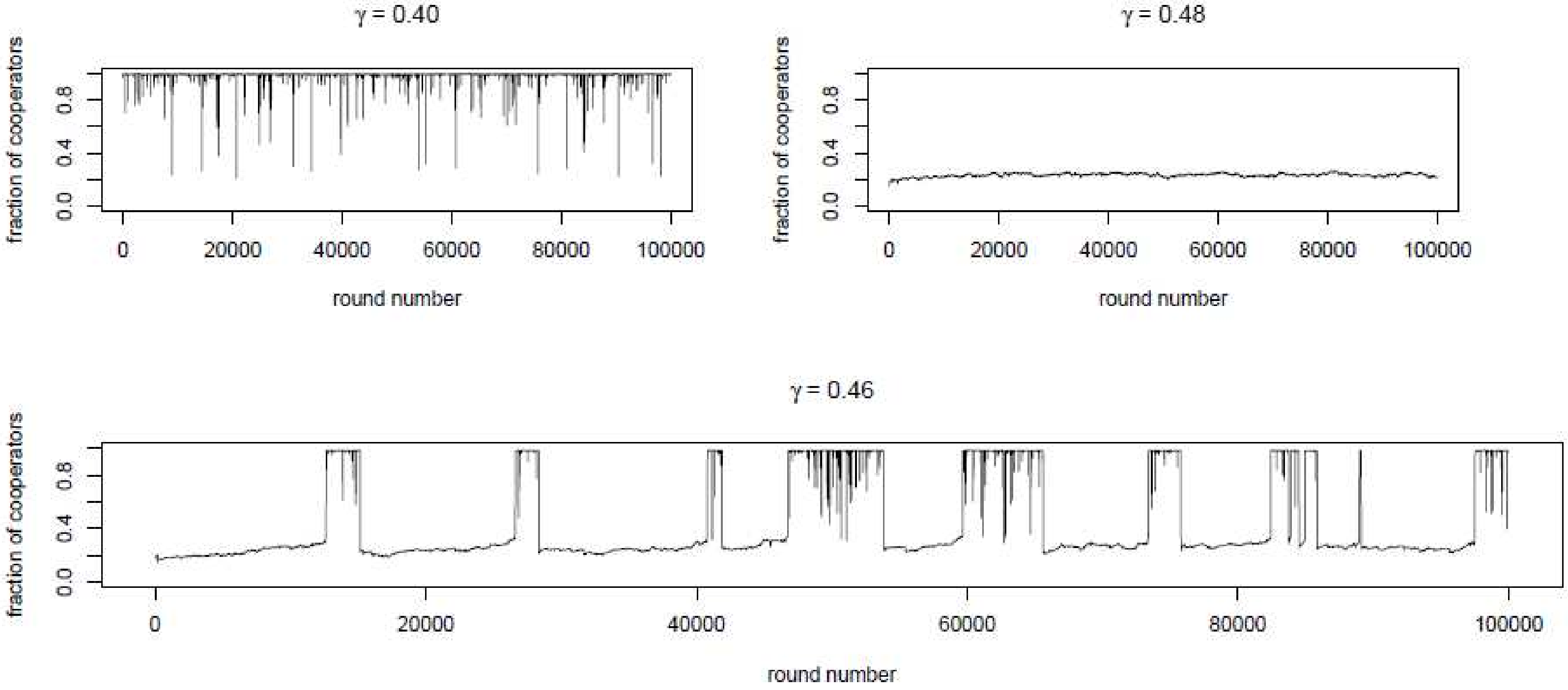


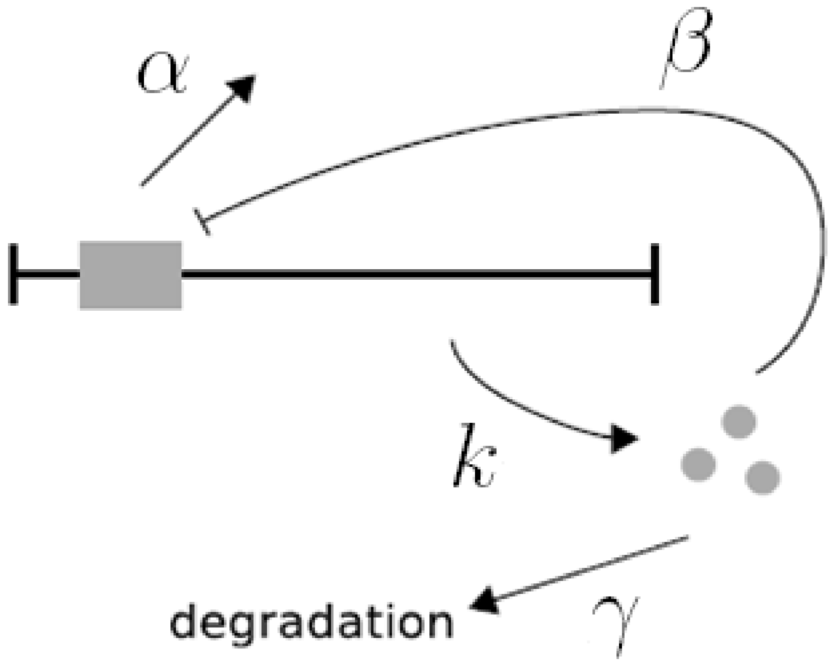
Figure 3: Fractions of cooperators after each round in sample simulations for different values of γ. Barabási-Albert network, $T = 1.5$, average connectivity equal to 12.

Problem Otwarty II

Udowodnij istnienie przejścia fazowego.
Jakiego rodzaju jest to przejście fazowe?

Akt 3 Ograniczający się gen

auto-represja genów w komórkach



Skokowe Procesy Markowa

$$\begin{tikzcd}
0: & \mathrm{DNA} \arrow[r, "k_0"] & P \arrow[r, "\gamma"] \arrow[l, bend right, "\beta"'] & \emptyset
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& {} & & \\
1: & \mathrm{DNA} \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[r, "k_1"] & P \arrow[r, "\gamma"] & \emptyset
\end{tikzcd}$$

Równania Mistrzów

$f_0(n,t), f_1(n,t)$ prawdopodobieństwo, że w komórce jest n cząsteczek białka i gen jest odpowiednio w stanie 0 lub 1 w czasie t

$$\frac{df_0(n,t)}{dt} = k_0[f_0(n-1) - f_0(n)] + \gamma[(n+1)f_0(n+1) - nf_0(n)] - \beta \cdot nf_0(n) + \alpha f_1(n)$$

$$\frac{df_1(n,t)}{dt} = k_1[f_1(n-1) - f_1(n)] + \gamma[nf_1(n+1) - (n-1)f_1(n)] + \beta \cdot nf_0(n) - \alpha f_1(n)$$

$$\beta$$

$$0: \quad \mathrm{DNA} \xrightarrow{k_0} P \xrightarrow{\gamma} \emptyset$$

$$\alpha$$

$$1: \quad \mathrm{DNA} \xrightarrow{k_1} P \xrightarrow{\gamma} \emptyset$$

Małe parametry

szybkie przełączanie   małe opóźnienie

$$\alpha = \frac{a}{\varepsilon}, \ \beta = \frac{b}{\varepsilon}$$ tau = Tε

Otwarty Problem III

Jak skonstruować rozwinięcie wokół zmiennej Poissona ?

Praca z Jankiem Wehrem wre

zapraszam do współpracy

www.mimuw.edu.pl/~miekisz