

Przypomnienie z wykładu. Dla $x > 0$ kładziemy

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Całka ta jest zbieżna dla każdego $x > 0$, więc jest to dobra definicja funkcji $\Gamma: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$; funkcję tę nazywamy *funkcją gamma*.

Mamy oczywiście $\Gamma(1) = 1$, zaś całkując przez części łatwo sprawdzić, że $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ dla $x > 0$; stąd wynika, że $\Gamma(n) = (n-1)!$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ponadto na wykładzie zostało sprawdzone, że funkcja $x \mapsto \ln(\Gamma(x))$ jest (ściśle) wypukła (na $(0, \infty)$).¹ Ta własność jest związana z twierdzeniem charakteryzacyjnym H. Bohra, które zostało wspomniane na wykładzie.²

Zadanie, cz. 1 z 2. Dla $x > 0$, $y > 0$ definiujemy *funkcję beta* wzorem

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

- a) Sprawdzić, że to dobra definicja, tzn. uzasadnić, że powyższa całka jest zbieżna.
- b) Wykazać, że $B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$ dla $x, y > 0$.
- c) Uzasadnić, że $B(x+1, y) + B(x, y+1) = B(x, y)$ dla $x > 0$, $y > 0$.
- d) Wykazać, że dla każdego $y > 0$ funkcja $x \mapsto \ln B(x, y)$ jest wypukła na $(0, \infty)$.

Wskazówka. Jak własności funkcji Γ podobne do tych z podpunktów b) i d) były dowodzone na wykładzie?

Trochę dodatkowej teorii. Można udowodnić, że

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad \text{dla } x, y > 0.$$

Można do tego użyć podpunktu d) i twierdzenia Bohra; inny (prosty!) dowód pojawi się w tym semestrze przy okazji twierdzenia Fubinię. Ponadto można sprawdzić, że

$$B(x, 1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \quad \text{dla } x \in (0, 1)$$

(nie jest to bardzo trudne, ale zdecydowanie nie jest zupełnie trywialne: można albo wykorzystać do tego pewne iloczynowe wzory na funkcję Γ (które zasługują na miano osobnych twierdzeń, patrz np. ww. skrypty) albo policzyć pewne specjalne całki (trudniejsze niż standardowe zadania na egzamin z AM 1, patrz np. książka Fichtenholza)). Wynika z tego *wzór na dopełnienie*:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \quad \text{dla } x \in (0, 1).$$

¹Nieformalny komentarz: chodzi zasadniczo to, że funkcja Γ rośnie bardzo szybko.

²Sformułowanie i dowód: patrz np. https://www.mimuw.edu.pl/~krych/matematyka/AM1skrypt/am1_cz12-funkcja_gamma.pdf lub https://www.mimuw.edu.pl/~pawelst/analiza/Analiza_Matematyczna_1/Notatki_itp./Archiwum_files/skryptAM1-2010-11-ver01.010c.pdf.

Zadanie, cz. 2 z 2. e) Obliczyć $\Gamma(1/2)$, $\Gamma(3/2)$, $\Gamma(2025/2)$.

f) Z poniższych całek:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{a-1} dx \quad (a > 0), \\ & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (p > -1), \\ & \int_0^1 x^{p-1} (1-x^m)^{q-1} dx \quad (p, q, m > 0), \\ & \int_0^{\pi/2} \sin^{a-1}(x) \cos^{b-1}(x) dx \quad (a, b > 0), \\ & \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^c(x) dx \quad (|c| < 1), \end{aligned}$$

wybrać 3 (słownie: trzy) i obliczyć je poprzez sprowadzenie ich do całek, których wartości można wyrazić przez funkcje Γ i B .

Wskazówka i komentarz. W podpunkcie e) wzór na dopełnienie przyjmujemy jako czarną skrzynkę. W f) trzeba oczywiście coś popodstawiać. Na potrzeby rozwiązania nie trzeba sprawdzać, że wyjściowa całka jest zbieżna, ale po otrzymaniu odpowiedzi (wyrażonej w terminach funkcji Γ i B) należy przekonać się, że podane w treści zakresy parametrów są rozsądne.