AM II.1, semestr zimowy 2024/25

Michał Strzelecki · michalst@mimuw.edu.pl · 24 stycznia 2025

O tym pliku. Plik jest w budowie i będzie się powiększał w trakcie semestru. Będę się starał udostępniać w miarę kompletne rozdziały, ale numeracja zadań i ich treści mogą się zmienić. Mogą się trafiać rozmaite błędy – *będę wdzięczny za informacje o wszystkich*.

Każdy z rozdziałów jest podzielony na dwie części. Pierwsza część zawiera zadania, które planuję omawiać podczas zajęć, a także hasłowy skrót najważniejszych treści teoretycznych. Można to przejrzeć przed zajęciami (np. żeby zorientować się, jaką tematykę będziemy poruszać i co należy powtórzyć z wykładu), ale raczej nie warto rozwiązywać zadań z części pierwszej w domu przed zajęciami. Zadania oznaczone pełną kropką (•) omówimy prawie na pewno na ćwiczeniach.

Druga część rozdziału to zadania, z których większości – z różnych powodów – nie będziemy omawiać na zajęciach (np. bo omówimy inne podobne, bo są za łatwe, bo są za trudne, bo są za mało na temat, bo będą zadane w pracy domowej, bo są pomyślane jako zadania do pracy własnej). Te zadania można wykorzystać jako zadania treningowe lub uzupełniające (ale nie twierdzę, że warto lub należy zrobić wszystkie).

O przedmiocie. AM 2 będzie trochę innym przedmiotem niż AM 1. Będziemy pracować z funkcjami $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$. W wielu wymiarach będzie trudniej korzystać z geometrycznych intuicji (bo będzie trudniej wyobrazić sobie lub narysować na komputerze wykres funkcji). Niektóre fakty, które były praktycznie oczywiste dla funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tu będą wymagały bardziej uważnych, skomplikowanych lub technicznych dowodów. Niektóre pojęcia będą dość abstrakcyjne. Ze względu na charakter materiału same ćwiczenia też pewnie będą wyglądały trochę inaczej niż na pierwszym roku.

Wiele osób zniechęca się przez „znaczkologię" – faktycznie, czasami będzie trochę indeksów, bo funkcja będzie brała wektor o k współrzędnych i zwracała wektor o l współrzędnych, a zamiast pochodnej funkcji w punkcie (czyli liczby) będziemy mieli przekształcenie liniowe (macierz). (A jeśli byśmy mieli ciąg funkcji i/lub ich pochodnych wzięty w jakimś ciągu punktów i zaczęli wybierać podciągi zbieżne, to . . .). Wielka prośba: proszę nie dać się zniechęcić, zmylić i zgubić! Za większością pojęć, twierdzeń i rozumowań nadal będą stały konkretne geometryczne lub analityczne pomysły. Poznamy różne *bardzo ważne* fakty, *bardzo piękne* twierdzenia i *bardzo mocne* teorie.

Wymagania wstępne Oczywiście będzie potrzebne rozsądne ogarnięcie w tematyce AM 1 (funkcje jednej zmiennej), ale zakładam, że z tym nie powinno być problemów.

Po drugie, jeśli ktoś przez wakacje zupełnie zapomniał o GALu, to dobrze nabyłoby przypomnieć sobie, że macierze zadają przekształcenia liniowe, jak się mnoży macierze (i kiedy można to robić) i jak się mnoży macierz przez wektor, a w dalszej kolejności, że były takie rzeczy jak iloczyn skalarny, macierze symetryczne, formy kwadratowe, oraz że wyznacznik ma coś wspólnego ze zmianą objętości.

Wreszcie, będzie praktycznie od razu potrzebne trochę topologii (zbiory otwarte i domknięte [w przestrzeni $\mathbb{R}^k$], ich własności), więc proszę skupić się na szybkim ogarnięciu podstawowych definicji, które pojawią się na wykładzie z AM 2, oraz uważać zajęciach z topologii.

Spis treści

1. Normy, granice, ciągłość

Materiał do omówienia na zajęciach [3–4 ćw.]

Teoria (déjà vu). Przestrzeń liniowa $\mathbb{R}^k$. Wiemy, że:

- $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ to punkty/wektory,
- $x \cdot y = \langle x, y \rangle = xy^T = \sum_{j=1}^k x_j y_j$ to iloczyn skalarny,
- $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = (\sum_{j=1}^k x_j^2)^{1/2}$ to norma euklidesowa (odległość od zera),
- $\|x - y\|_2$ to odległość punktów x, y (spełnia aksjomaty przestrzeni metrycznej),
- zachodzi nierówność Cauchy'ego–Schwarza: $|\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\|_2 \|y\|_2$.

Teoria (déjà vu). Definicja normy [na przestrzeni liniowej].

• **1.1** (norma w ℓ_p^k)**.** Dla $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ oraz $p \in [1, \infty)$ kładziemy

$$\|x\|_p := \Big(\sum_{j=1}^k |x_j|^p \Big)^{1/p}.$$

a) Co kładziemy dla $p = \infty$?
b) Uświadomić sobie, że $\| \cdot \|_p$ jest normą na $\mathbb{R}^k$ dla $p \in \{1, 2, \infty\}$.
c) Dla $k = 2$, $p \in \{1, 2, \infty\}$ naszkicować domknięte kule jednostkowe

$$\{x \in \mathbb{R}^k : \|x\|_p \leqslant 1\}.$$

Naszkicować lub słownie opisać te kule również dla $k = 3$, $p \in \{1, 2, \infty\}$.

d) Uzasadnić, że $\|x\|_p \geqslant \|x\|_q$ dla $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, $x \in \mathbb{R}^k$. Zrozumieć, co znaczy ta nierówność w terminach kul jednostkowych.

e) Wykazać, że $\| \cdot \|_p$ jest normą na $\mathbb{R}^k$ dla każdego $p \in [1, \infty]$.

◦ **1.2** (uzupełnienie wiedzy podwórkowej)**.** a) Załóżmy, że $p, q \in (1, \infty)$ spełniają $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wykazać, że dla $x, y \in \mathbb{R}^k$ zachodzi nierówność Höldera:

$$|\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q.$$

Wskazówki. Dowodów jest wiele. Można udowodnić najpierw nierówność Younga: $ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$ $(a, b \geqslant 0)$ korzystając z wypukłości odpowiedniej funkcji. Alternatywnie można najpierw udowodnić nierówność Höldera dla $p, q \in \mathbb{Q}$, $\frac{1}{p} = \frac{n}{n+m}$, $\frac{1}{q} = \frac{m}{n+m}$.

b) Uzasadnić, że tak naprawdę zachodzi też $\|x\|_p = \sup\{\langle x, y \rangle : \|y\|_q \leqslant 1, y \in \mathbb{R}^k\}$.
c) Uświadomić sobie, że wszystko działa też dla $p, q \in [1, \infty]$.

- **1.3.** Dana jest pewna norma $\|\cdot\|$ na $\mathbb{R}^k$. Sprawdzić, że domknięta kula jednostkowa $B = \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| \leqslant 1\}$ jest zbiorem wypukłym i symetrycznym (względem 0, tzn. $B = -B$). Uzasadnić, że dla każdej prostej $L \subset \mathbb{R}^k$ przechodzącej przez $0 \in \mathbb{R}^k$ zbiór $B \cap L$ jest odcinkiem skończonej [euklidesowej] długości.

- **1.4.** Dany jest zbiór $K \subset \mathbb{R}^k$, który jest wypukły, zwarty (tzn. – w przypadku $\mathbb{R}^k$ – domknięty i ograniczony), ma niephfhuste wnętrze, i jest symetryczny ($K = -K$). Dla $x \in \mathbb{R}^k$ definiujemy

$$\|x\|_K = \inf\big\{t > 0 : \frac{1}{t}x \in K\big\}.$$

a) Wykonać rysunek poglądowy.
b) Wykazać, że $\|\cdot\|_K$ jest normą, zaś K domkniętą kulą jednostkową w tej normie.

***

Teoria (łatwe i naturalne). Definicja zbieżności ciągu punktów w $\mathbb{R}^k$ (w normie [euklidesowej]); zbieżność współrzędnych.

Komentarz. Odtąd będziemy na ogół pracować ze standardową normą euklidesową $\|\cdot\|_2$ w $\mathbb{R}^k$, ale gdybyśmy wybrali inną normę, to we wprowadzanych pojęciach zbieżności, ciągłości, otwartości itp. niewiele by się zmieniło, bo okazuje się, że na przestrzeni $\mathbb{R}^k$ wszystkie normy są równoważne (patrz zadanie 1.10 poniżej).

Teoria (déjà vu). Definicja granicy funkcji w punkcie (mamy $A \subset \mathbb{R}^k$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, oraz punkt $p \in \mathbb{R}^k$, który jest punktem skupienia zbioru A).

- **1.5.** Obliczyć poniższe granice lub wykazać, że nie istnieją:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+xy+y^2},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^4)}{\exp(x^2+y^4)-1}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^{7/5}y^3}{x^2+4y^6}.$$

- **1.6.** Funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ma tę własność, że dla każdej prostej $L \subset \mathbb{R}^2$ przechodzącej przez $(0,0)$ zachodzi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),(x,y)\in L} f(x,y) = 0$$

(po obcięciu f do prostej L granica w punkcie $(0,0)$ istnieje i jest równa 0). Rozstrzygnąć, czy wynika z tego, że istnieje granica $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

- **1.7.** a) Podać przykład możliwie najprostszej funkcji $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, która spełnia wszyskie poniższe warunki:
  - dla każdego $y \in \mathbb{R}$ istnieje skończona granica $\lim_{x\to 0} f(x,y)$,
  - dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje skończona granica $\lim_{y\to 0} f(x,y)$,
  - istnieją skończone granice iterowane

$$\lim_{y\to 0}\big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\big), \qquad \lim_{x\to 0}\big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\big)$$

(i są równe),

- granica $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *nie* istnieje.

b) Funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest zadana wzorem

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\cdot \begin{cases} 0 & \text{jeśli } x,y \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Uświadomić sobie, że $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, ale nie istnieje granica iterowana $\lim_{y\to 0}\big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\big)$.

c) Załóżmy, że dla funkcji $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zachodzi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, a ponadto dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje skończona granica $g(x) := \lim_{y\to 0} f(x,y)$. Czy jest prawdą, że $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$?

Teoria (déjà vu). Mamy $A \subset \mathbb{R}^k$ (dowolny), $f\colon A \to \mathbb{R}^l$. Definicja ciągłości funkcji (ciągowa i epsilonowo-deltowa (w punkcie $p \in A$, na całym A)).

Uwaga (istotna). Mamy $A \subset \mathbb{R}^k$, $f\colon A \to \mathbb{R}^l$. Twierdzeniem z wykładu jest, że wtedy powyższa definicja funkcji ciągłej $f\colon A \to \mathbb{R}^l$ jest zgodna z ogólną definicją z wykładu topologii[1] – w zbiorze A rozpatrujemy naturalną topologię indukowaną z całej przestrzeni $\mathbb{R}^k$, tj. zbiory otwarte w naszej mniejszej przestrzeni topologicznej A to dokładnie zbiory postaci $A \cap U$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^k$ jest otwarty (w $\mathbb{R}^k$).

• **1.8.** Zbadać ciągłość funkcji $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadanych wzorami:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x^2} e^{-|y|/x^2} & \text{jeśli } x \neq 0, \\ 1 & \text{jeśli } x = 0, \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x^3-y} & \text{dla } y \neq x^3, \\ 1 & \text{dla } y = x^3. \end{cases}$$

Teoria (elementy topologii). Zbiór otwarty, domknięty. Ciągowa charakteryzacja domkniętości. W $\mathbb{R}^k$ (!) zbiór zwarty to zbiór domknięty i ograniczony. Wnętrze, domknięcie, brzeg. Spójność.

Teoria (déjà vu). Większość faktów o ciągłość przenosi się na przypadek funkcji wielu zmiennych funkcji, m.in. te dotyczące operacji arytmetycznych, składania, osiągania kresów na zbiorach zwartych, jednostajnej ciągłości na zbiorach zwartych, ale trzeba trochę uważać, patrz np. zadania 1.27, 1.28, 2.12, 2.13.

• **1.9** (klasyczne; por. zadanie 1.35)**.** a) Funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest zdefiniowana wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Sprawdzić, że f jest ciągła na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, nie jest ciągła w punkcie $(0,0)$, ale jest ciągła po obcięciu do dowolnej prostej przechodzącej przez $(0,0)$.

b) Podać przykład funkcji $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mającej dokładnie dwa [zadane z góry] punkty nieciągłości (a,b), (c,d) i takiej, że g jest ciągła po obcięciu do dowolnej prostej $L \subset \mathbb{R}^2$.

c) Podać przykład funkcji $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nieciągłej dokładnie w [zadanych z góry] punktach $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ ($n \in \mathbb{N}$), i ciągłej po obcięciu do dowolnej prostej $L \subset \mathbb{R}^2$.

[1] Przekształcenie $f\colon X \to Y$ przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}_X)$w przestrzeń topologiczną $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $U \in \mathcal{T}_Y$ mamy $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$ (przeciwobrazy zbiorów otwartych [w Y] są otwarte [w X]).

◦ **1.10** (ważne)**.** Dane jest $k \in \mathbb{N}$ i pewna norma $\|\cdot\|$ na $\mathbb{R}^k$. Wykazać, że istnieją pewne stałe $A, B \in (0, \infty)$, zależne tylko od k i $\|\cdot\|$, takie że dla każdego $x \in \mathbb{R}^k$ zachodzi

$$A\|x\|_2 \leqslant \|x\| \leqslant B\|x\|_2.$$

W szczególności, ciąg punktów jest zbieżny w normie $\|\cdot\|$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny w standardowej normie euklidesowej.

• **1.11.** Ustalmy niepusty zbiór $A \subset \mathbb{R}^k$. Dla $x \in \mathbb{R}^k$ definiujemy

$$\operatorname{dist}(x, A) := \inf\{\|x - y\|_2 : y \in A\}.$$

a) Wykazać, że $\operatorname{dist}(\cdot, A)\colon \mathbb{R}^k \to [0, \infty)$ jest funkcją ciągłą na $\mathbb{R}^k$, a nawet spełnia warunek Lipschitza ze stałą 1.

b) Wykazać, że jeśli zbiór A jest domknięty, to powyższe infimum jest osiągane.

c) Wykazać, że jeśli zbiór A jest domknięty i wypukły, to powyższe infimum jest osiągane w dokładnie jednym punkcie.

d) Wykazać, że jeśli $A, B \subset \mathbb{R}^k$ są niepuste, domknięte i rozłączne, to istnieje funkcja ciągła $f\colon \mathbb{R}^k \to [0, 1]$, taka że

$$f(x) = 0 \iff x \in A, \qquad f(x) = 1 \iff x \in B.$$

• **1.12.** Załóżmy, że funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spełnia następujące warunki:
1) dla każdego $y \in \mathbb{R}$ funkcja $x \mapsto f(x, y)$ jest ciągła, rosnąca,
2) dla każdego $x \in \mathbb{R}$ funkcja $y \mapsto f(x, y)$ jest ciągła.

Wykazać, że funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest ciągła.

Zadania treningowe, uzupełniające, dodatkowe

1.13 (powtórka z GALu)**.** Przypomnieć sobie z GALu hasła: forma dwuliniowa, iloczyn skalarny, norma/długość wektora, tożsamość równoległoboku.

1.14. Dana jest pewna norma $\|\cdot\|$ na $\mathbb{R}^k$. Uzasadnić, że wzór

$$\|x\|_* := \sup\{\langle x, y\rangle : y \in \mathbb{R}^k, \|y\| \leqslant 1\}, \quad x \in \mathbb{R}^k,$$

również zadaje normę na $\mathbb{R}^k$. [W szczególności uzasadnić, że $\|x\|_* < \infty$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^k$.]

1.15 (niekluczowe dla nauki AM 2, ale naturalne, choć być może dość abstrakcyjne)**.** Dla niepustego zbioru $A \subset \mathbb{R}^k$ definiujemy zbiór

$$A^\circ = \{y \in \mathbb{R}^k : \langle x, y\rangle \leqslant 1 \text{ dla każdego } x \in A\}.$$

Zbiór ten nazywa się zbiorem polarnym albo polarem zbioru A.

a) Uzasadnić, że A° jest domkniętym, wypukłym podzbiorem $\mathbb{R}^k$ zawierającym 0.

b) Uzasadnić, że jeśli $A \subset B$, to $A^\circ \supset B^\circ$.

c) Wykazać, że jeśli zbiór $K \subset \mathbb{R}^k$ jest wypukły, zwarty, ma niepuste wnętrze, i jest symetryczny ($K = -K$), to zbiór K° też jest wypukły, zwarty, ma niepuste wnętrze, i jest symetryczny, a ponadto $(K^\circ)^\circ = K$.

d) Wykazać, że $\|\cdot\|_{K^\circ}$ jest normą dualną do $\|\cdot\|_K$, tzn. dla $x \in \mathbb{R}^k$ zachodzi

$$\|x\|_K = \sup\{\langle x, y\rangle : \|y\|_{K^\circ} \leqslant 1, y \in \mathbb{R}^k\}.$$

e) Zorientować się, że $\|\cdot\|_K$ jest normą dualną do $\|\cdot\|_{K^\circ}$.

1.16 (norma operatorowa)**.** Dla przekształcenia liniowego $A\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ (które można utożsamiać z zadającą je macierzą $(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant l, 1\leqslant j\leqslant k}$ rozmiaru $l \times k$) kładziemy

$$\|A\|_{2\to 2} \coloneqq \sup\{\|Ax\|_2 : \|x\|_2 \leqslant 1,\ x \in \mathbb{R}^k\}.$$

a) Wykazać, że

$$\|A\|_{2\to 2} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k} a_{ij}^2\Big)^{1/2}.$$

Podać przykład macierzy 2×2, dla której powyższa nierówność jest ostra.

b) Uświadomić sobie, że dla każdego $x \in \mathbb{R}^k$ zachodzi $\|Ax\|_2 \leqslant \|A\|_{2\to 2}\|x\|_2$, że $A\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ spełnia warunek Lipschitza (i że $\|A\|_{2\to 2}$ jest najmniejszą stałą z jaką on zachodzi).

c) Sprawdzić, że $\|\cdot\|_{2\to 2}$ jest normą [na przestrzeni przekształceń liniowych $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)$, którą można utożsamiać z $\mathbb{R}^{lk}$].

d) Uzasadnić, że jeśli $A\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$, $B\colon \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ to przekształcenia liniowe, to

$$\|BA\|_{2\to 2} \leqslant \|B\|_{2\to 2}\|A\|_{2\to 2}.$$

e) Uzasadnić, że jeśli $A\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ jest izomorfizmem liniowym, to

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|_{2\to 2}}\|x\|_2 \leqslant \|Ax\|_2 \leqslant \|A\|_{2\to 2}\|x\|_2 \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R}^k.$$

1.17. Dla przekształcenia liniowego $A\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ (które można utożsamiać z zadającą je macierzą $(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant l, 1\leqslant j\leqslant k}$ rozmiaru $l \times k$) kładziemy

$$\|A\|_{1\to 2} \coloneqq \sup\{\|Ax\|_2 : \|x\|_1 \leqslant 1,\ x \in \mathbb{R}^k\},$$
$$\|A\|_{2\to\infty} \coloneqq \sup\{\|Ax\|_\infty : \|x\|_2 \leqslant 1,\ x \in \mathbb{R}^k\}.$$

Wykazać, że

$$\|A\|_{1\to 2} = \max\{\|(a_{ij})_{i=1}^{l}\|_2 : 1 \leqslant j \leqslant k\}$$
$$\|A\|_{2\to\infty} = \max\{\|(a_{ij})_{j=1}^{k}\|_2 : 1 \leqslant i \leqslant l\}.$$

(maksimum [euklidesowych] długości kolumn i wierszy macierzy A, odpowiednio).

1.18. Niech $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, $f(x,y) = y^x$ dla $(x,y) \in A$. Zbadać istnienie granicy

$$\lim_{(x,y)\to(a,0)} f(x,y)$$

w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$.

1.19. Obliczyć granice:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\ln(x^2+3x^4), \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}.$$

○ **1.20.** Obliczyć poniższe granice lub wykazać, że nie istnieją:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x+y)}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos^2(|x|+|y|)}{x^2+y^2},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^4}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+x^4+y^4}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^4},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^4}{x^2+y^4}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^4}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4},$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^{10}y^{10}z^{10}}{x^4+y^2z} \quad \text{na zbiorze } \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^4+y^2z \neq 0\},$$

1.21. Obliczyć poniższe granice lub wykazać, że nie istnieją:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x)y}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sin(x)yz}{x^2+y^2},$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sin(x)y}{x^2+|z|y^2}, \qquad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sin(x)y}{zx^2+y^2}.$$

(ostatni przykład na „naturalnej” dziedzienie, na której $zx^2+y^2 \neq 0$).

1.22. Dla każdego punktu $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, którego współrzędne spełniają równanie $a+b=1$, obliczyć granicę

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{y\sin(\pi x)}{x+y-1}$$

lub wykazać jej nieistnienie. (Zakładamy „naturalną” dziedzinę funkcji, odpowiadającą niezerującemu się mianownikowi).

1.23 (kolokwium 2010)**.** Obliczyć granicę lub wykazać, że nie istnieje:

$$\lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \sqrt{\frac{1}{x^4+y^4}+\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^4+y^4}+\frac{1}{y}}.$$

1.24. a) Wskazać przykład rodziny zbiorów domkniętych w $\mathbb{R}^2$, której suma jest zbiorem otwartym (ale nie całą przestrzenią).

b) Wskazać przykład rodziny zbiorów otwartych w $\mathbb{R}^2$, której przecięcie jest niepustym zbiorem domkniętym.

1.25. a) Uświadomić sobie, że każdy zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^k$ jest sumą pewnej rodziny kul otwartych.

b) Uzasadnić, że każdy zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^k$ jest sumą pewnej *przeliczalnej* rodziny kul otwartych.

c) Uzasadnić, że każdy zbiór otwarty $V \subset \mathbb{R}$ jest sumą pewnej rodziny parami rozłącznych odcinków otwartych [być może nieskończonej długości].

∘ **1.26.** a) W zbiorze $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ zadajemy naturalną topologię indukowaną z $\mathbb{R}^2$ (zbiory otwarte w A to zbiory postaci $A \cap U$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^2$ jest otwarty). Dla każdego z następujących zbiorów określić, czy jest on otwartym, domkniętym, zwartym podzbiorem A:

$$\{(x,y) \in A : 0 < y < 1\},$$
$$\{(x,y) \in A : 0 < y \leqslant 1\},$$
$$\{(x,y) \in A : x^2 + (y-1)^2 \leqslant 1\}.$$

b) W zbiorze $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant 0\}$ zadajemy naturalną topologię indukowaną z $\mathbb{R}^2$ (zbiory otwarte w B to zbiory postaci $B \cap U$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^2$ jest otwarty). Dla każdego z następujących zbiorów określić, czy jest on otwartym, domkniętym, zwartym podzbiorem B:

$$\{(x,y) \in B : 0 < y < 1\},$$
$$\{(x,y) \in B : 0 \leqslant y < 1\},$$
$$\{(x,y) \in B : 0 < y \leqslant 1\},$$
$$\{(x,y) \in B : 0 \leqslant y \leqslant 1\},$$
$$\{(x,y) \in B : x^2 + (y-1)^2 \leqslant 1\}.$$

∘ **1.27.** a) Przypomnieć sobie, że jeśli P jest wielomianem jednej zmiennej o współczynnikach rzeczywistych, to obrazem prostej jest półprosta domknięta, cała prosta lub punkt.

b) Podać przykład wielomianu dwóch zmiennych o współczynnikach rzeczywistych $Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, którego obrazem jest półprosta otwarta $(0, \infty)$.

1.28. a) Przypomnieć sobie, że jeśli $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem, to $f\colon I \to \mathbb{R}$ jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy gdy jest ściśle monotoniczna. Ponadto, jeśli f jest różnowartościowa i ciągła, to jest bijekcją na swój obraz, a funkcja odwrotna $f^{-1}\colon f(I) \to \mathbb{R}$ też jest ciągła.

b) Podać przykład przedziału $I \subset \mathbb{R}$ i funkcji $g\colon I \to \mathbb{R}^2$, która jest ciągła i różnowartościowa, ale funkcja odwrotna $g^{-1}\colon g(I) \to I$ nie jest ciągła.

1.29. Zbadać ciągłość funkcji $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadanej wzorem:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y-x}{y-\sin(x)} & \text{jeśli } y \neq \sin(x), \\ 1 & \text{jeśli } y = \sin(x). \end{cases}$$

1.30. Zbadać ciągłość funkcji $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadanej wzorem:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \Big(\dfrac{x+\sin(y)}{1+z^2}, \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}, \dfrac{1-\cos(xyz)}{x^2+y^4+z^6}\Big) & \text{dla } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ (0,0,0) & \text{dla } (x,y,z) \neq (0,0,0). \end{cases}$$

1.31. Niech $k \geqslant 2$. Załóżmy, że funkcja $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ jest ciągła i istnieją $a, b \in \mathbb{R}^k$ takie, że $f(a) < 0 < f(b)$. Uzasadnić, że funkcja f ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.

1.32. Dla $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ niech

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \ln(1+x^2+y^2+z^2)\cos(x^2+y^2+z^2)\exp(-(x^2+y^2+z^2)), \\ g(x,y,z) &= \ln(1+x^2+y^2+z^2)\cos(xyz)\exp(-(x^2+y^4+z^6)). \end{aligned}$$

Uzasadnić, że każda z tych funkcji osiąga swoje kresy.

1.33. a) Funkcja $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ jest ciągła. Uzasadnić, że jej wykres, tj. zbiór

$$\big\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l : x \in \mathbb{R}^k\big\},$$

jest domknięty [w przestrzeni $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l = \mathbb{R}^{k+l}$].

b) Podać przykład funkcji $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która nie jest ciągła w punkcie 0, ale której wykres$\{(x, g(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ jest domkniętym podzbiorem $\mathbb{R}^2$.

1.34. a) Funkcja $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ jest ciągła, punkt $x_0 \in \mathbb{R}^k$ jest ustalony. Wykazać, że poziomica funkcji f przechodząca przez punkt x_0, tj. zbiór

$$\big\{x \in \mathbb{R}^k : f(x) = f(x_0)\big\},$$

jest domknięty.

b) Podać przykład zbioru $A \subset \mathbb{R}^k$, funkcji ciągłej $g\colon A \to \mathbb{R}$ i punktu $x_0 \in A$, takich że $\{x \in A : g(x) = g(x_0)\}$ *nie* jest domkniętym podzbiorem $\mathbb{R}^k$.

○ **1.35** (por. zadanie 1.9)**.** Funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest zdefiniowana wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\exp(-1/x^2)y}{\exp(-2/x^2)+y^2} & \text{jeśli } x \neq 0, \\ 0 & \text{jeśli } x = 0. \end{cases}$$

a) Sprawdzić, że f jest ciągła po obcięciu do dowolnej krzywej postaci $y = cx^{m/n}$ ($c \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}$ – względnie pierwsze, $x \geqslant 0$ w przypadku gdy n jest parzyste).

b) Rozstrzygnąć, czy f jest ciągła w punkcie $(0,0)$.

1.36. Załóżmy, że funkcja $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ jest ciągła. Niech

$$g(x) \coloneqq \sup\{f(x,y) : y \in [0,1]\} \qquad \text{dla } x \in [0,1].$$

Wykazać, że funkcja $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ jest ciągła.

1.37. Załóżmy, że funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spełnia następujące warunki:

1) dla każdego $y \in \mathbb{R}$ funkcja $x \mapsto f(x,y)$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą 7,
2) dla każdego $x \in \mathbb{R}$ funkcja $y \mapsto f(x,y)$ jest ciągła.

Wykazać, że funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest ciągła.

1.38. Załóżmy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}^2$ jest spójny. Wiadomo z wykładu topologii, że wówczas domknięcie zbioru A też jest zbiorem spójnym.[2]

a) Czy wnętrze zbioru A może być zbiorem niespójnym?

b) Czy brzeg zbioru A może być zbiorem niespójnym?

1.39 (informacyjnie)**.** Rozważmy [nieskończeniewymiarową] przestrzeń liniową

$$\ell_2(\mathbb{N}) \coloneqq \Big\{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} : x_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\Big\}$$

z normą $\|x\|_2 \coloneqq (\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2)^{1/2}$ dla $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2(\mathbb{N})$.

a) Wskazać ciąg różnych punktów w [domkniętej] kuli jednostkowej $\{x \in \ell_2(\mathbb{N}) : \|x\|_2 \leqslant 1\}$, z których każde dwa są w odległości $\sqrt{2}$.

b) Wywnioskować, że [domknięta] kula jednostkowa nie jest zwarta.

Uwaga. Okazuje się, że prawdziwe jest następujące twierdzenie: przestrzeń unormowana jest skończenie wymiarowa wtedy i tylko wtedy, gdy jej domknięta kula jednostkowa jest zwarta.

c) Połóżmy $\|x\|_\infty \coloneqq \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$ dla $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2(\mathbb{N})$. Uświadomić sobie, że to też jest norma [na przestrzeni $\ell_2(\mathbb{N})$]. Uzasadnić, że normy $\|\cdot\|_2$ i $\|\cdot\|_\infty$ nie są równoważne (np. wskazując dla każdego $n \in \mathbb{N}$ punkt $x \in \ell_2(\mathbb{N})$, taki że $\|x\|_2 = 1$, ale $\|x\|_\infty = 1/n$).

[2] Wręcz: dowolny zbiór spełniający $A \subset B \subset \overline{A}$ jest spójny (i jest to prawda w ogólnej przestrzeni topologicznej).

2. Pochodne cząstkowe, różniczkowalność

Umowa. W przestrzeni euklidesowej mamy naturalne bazy i będziemy utożsamiać przekształcenie liniowe $A\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ z zadającą je macierzą A rozmiaru $l \times k$ (w bazach standardowych, mnemotechnicznie: l linii/wierszy, k kolumn). Wektory będziemy na ogół zapisywać poziomo, $x = (x_1, \ldots, x_k)$, ale wektor można utożsamić z „pionową” macierzą rozmiaru $k \times 1$ (i nazywać go wtedy wektorem kolumnowym) i interpretować Ax jako mnożenie dwóch macierzy (którego wynikiem jest wektor kolumnowy). [Nie będziemy tego na ogół zaznaczać i rozróżniać w notacji].

Materiał do omówienia na zajęciach [4+ ćw. (??)]

Teoria. Pochodne cząstkowe (ozn. $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} f = f'_{x_i} = f_{x_i} = f'_i = f_i = D_i f = D_{e_i} f$), pochodna kierunkowa.

• **2.1.** a) Znaleźć pochodne cząstkowe funkcji $f(x, y) = \sin(x) + y^2 e^{xy}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
b) Obliczyć pochodne cząstkowe i kierunkowe (jeśli istnieją) funkcji

$$g(x,y) = \mathbf{1}_{\{y=x^2, x>0\}} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } y = x^2 \text{ oraz } x > 0, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

c) Obliczyć pochodne cząstkowe (jeśli istnieją) funkcji $h(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Znaleźć pochodne kierunkowe w punkcie $(0, 0)$.

• **2.2.** a) Zbiór $A \subset \mathbb{R}^2$ jest otwarty i wypukły. Pochodne cząstkowe funkcji $f\colon A \to \mathbb{R}$ istnieją w zbiorze A i są funkcjami ograniczonymi: $|f'_x(x, y)| \leqslant C$. Wykazać, że funkcja f spełnia warunek Lipschitza.
b) Podać przykład zbioru otwartego, spójnego $B \subset \mathbb{R}^2$ i funkcji $g\colon B \to \mathbb{R}$, która jest ciągła, ma [wszędzie w zbiorze B] pochodne cząstkowe, pochodne cząstkowe są ciągłe i ograniczone na B, ale funkcja g nie jest jednostajnie ciągła.

Teoria. Mamy $U = \operatorname{int} U \subset \mathbb{R}^k$, $f\colon U \to \mathbb{R}^l$, $p \in U$. Definicja różniczkowalności.[1] Własności:

[1] Istnieje przekształcenie liniowe $Df(p)\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$, takie że:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p) - Df(p)h}{\|h\|_2} = 0$$

(po lewej stronie $\mathbb{R}^k \ni h \to 0 \in \mathbb{R}^k$, po prawej stronie $0 \in \mathbb{R}^l$).

- różniczkowalność $\Longrightarrow$ ciągłość (déjà vu);
- różniczkowalność $\Longrightarrow$ istnienie pochodnych cząstkowych (kierunkowych);
- jeśli pochodne cząstkowe istnieją [wszędzie] w otoczeniu p i są *ciągłe* w p, to f jest różniczkowalna w p.

• **2.3.** Niech $f(x,y) = x\sqrt{4+|x|-|y|}$ (na „naturalnej” dziedzinie: $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, takie że $4+|x|-|y| \geqslant 0$). Zbadać różniczkowalność w wewnętrznych punktach dziedziny.

• **2.4.** Niech $f(x,y) = y^x$ dla $y > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Policzyć (w możliwie najprostszy sposób) $f'_{(4,5)}(2,3)$, tj. pochodną kierunkową funkcji f w punkcie $(2,3)$ w kierunku wektora $(4,5)$.

◦ **2.5.** Czy funkcja $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$?

◦ **2.6.** Rozważamy przestrzeń $M_{k\times k}(\mathbb{R})$ (macierze wymiaru $k \times k$ o wyrazach rzeczywistych), którą utożsamiamy z $\mathbb{R}^{k^2}$. Funkcja $F(A) = A^2$ oczywiście musi być różniczkowalna – rozpisać definicję i sprawdzić, czy $DF(A) = 2A$. [Jeśli nie, to zrozumieć, jakim przekształceniem liniowym jest $DF(A)$.]

◦ **2.7.** Zbadać różniczkowalność funkcji $f(x,y) = |x^2-y|\ln(1+y)$ (na „naturalnej” dziedzinie: $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, takie że $y > -1$).

Teoria (déjà vu?). Różniczka złożenia. Różniczka funkcji odwrotnej ($k = l$, f^{-1} istnieje i ciągła w $f(p)$, $f(U)$ otwarty, $Df(p)$ to izomorfizm). Przekształcenia wieloliniowe.

***

Teoria (déjà vu). Punkty krytyczne, szukanie kresów funkcji różniczkowalnych.

• **2.8.** Znaleźć kresy funkcji $f(x,y) = x^2+xy+2y^2$ na zbiorze $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqslant 1\}$. Co by się zmieniło, gdybyśmy rozważali $\widetilde{f}(x,y) = x^2+xy-2y^2$?

• **2.9.** Znaleźć kresy funkcji $f(x,y) = (3x+2y)\exp(-4x^2-y^2)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

• **2.10.** Niech $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant x \geqslant 0\}$, $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2+1}$ dla $(x,y) \in A$. Wiadomo, że funkcja f nie ma punktów krytycznych we wnętrzu A. Znaleźć $\sup_A f$.

◦ **2.11.** Niech $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant 0,\ y \geqslant x-1,\ x^2 \geqslant 4y,\ 0 < x < 2\}$ oraz

$$f(x,y) = \frac{(1-y)^2(x^2-y-2xy+2y^2)}{(x-2y)^2}$$

dla $(x,y) \in A$. Znaleźć $\sup_A f$, $\inf_A f$.
Sugestia. Naszkicować zbiór A, zbadać znak $f'_x(x,y)$.

• **2.12** (klasyczne, por. zadanie 2.33)**.** Niech $f(x,y) = (y-x^2)(y-3x^2)$ dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Sprawdzić, że funkcja f obcięta do dowolnej prostej $L \subset \mathbb{R}^2$ przechodzącej przez punkt $(0,0)$ ma w punkcie $(0,0)$ minimum lokalne, ale punkt $(0,0)$ nie jest minimum lokalnym funkcji f.

○ **2.13** (patrz też zadanie 2.32)**.** Niech $f(x, y) = x^2(1+y)^3+y^2$ dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Sprawdzić, że jedynym punktem krytycznym funkcji f jest $(0, 0)$, że f ma w $(0, 0)$ minimum lokalne, ale f nie jest ograniczona ani z góry, a ani z dołu.

Komentarz. W szczególności punkcie swojego jedynego ekstremum lokalnego funkcja f nie osiąga ani kresu dolnego, ani kresu górnego – czy taka sytuacja może się zdarzyć dla funkcji jednej zmiennej?

***

Teoria. Gradient, „kierunek najszybszego wzrostu", prostopadłość do poziomicy.

Teoria. Wektor styczny do zbioru; stożek styczny.

○ **2.14.** a) Jakie wektory są styczne do wykresu funkcji $\mathbb{R} \ni x \mapsto \sqrt{|x|}$ w punkcie $(0, 0)$?

b) Jakie wektory są styczne do zbioru $(\mathbb{Q} \cap [0, \infty))^2$ w punkcie $(0, 0)$?

c) Narysować poziomicę $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$ funkcji $f(x, y) = x^2+y^2$, obliczyć $\nabla f(x, y)$ i zaznaczyć ten wektor na rysunku dla wybranego punktu z poziomicy – jakie wektory są styczne do poziomicy w tym punkcie?

d) Rozważmy paraboloidę obrotową w $\mathbb{R}^3$ opisaną równaniem $z = x^2 + y^2$, tj. wykres $\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$ funkcji z poprzedniego podpunktu. Opisać [geometrycznie/słownie], jak wyglądają [afiniczne] płaszczyzny styczne [do paraboloidy/do wykresu] w punktach $(0, 0, 0)$ i $(1, 0, 1)$. Niech $\varphi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$ będzie parametryzacją paraboloidy. Wypisać $D\varphi(0, 0)$ oraz $D\varphi(1, 0)$ i sprawdzić, że wektory $D\varphi(0, 0)e_1$, $D\varphi(0, 0)e_2$ oraz $D\varphi(1, 0)e_1$, $D\varphi(1, 0)e_2$ tworzą bazę odpowiednich [liniowych] przestrzeni stycznych.

***

Teoria. Różniczka złożenia, *chain rule.*

• **2.15.** a) Funkcja $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, a jej pochodne cząstkowe spełniają zależność

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z}.$$

Udowodnić, że $g(x, y, z) = \varphi(x + y + z)$ dla pewnej różniczkowalnej funkcji $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) Jak zmieni się teza, jeśli założymy, że $\frac{\partial g}{\partial x} = 2\frac{\partial g}{\partial y} = 3\frac{\partial g}{\partial z}$?

• **2.16.** a) Funkcja $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, a jej pochodne cząstkowe spełniają zależność

$$y\frac{\partial g}{\partial x} = x\frac{\partial g}{\partial y}.$$

Udowodnić, że $g(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$ dla pewnej funkcji $\varphi\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ (ciągłej, różniczkowalnej na $(0, \infty)$).

b+c+d) Patrz zadanie 2.48.

• **2.17.** Funkcja $f\colon \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i spełnia zależność

$$xf'_x + yf'_y = f.$$

Udowodnić, że $f(x, y) = x\varphi(y/x)$ dla pewnej różniczkowalnej funkcji $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

***

Teoria. Tw. Lagrange'a o wartości średniej.

Zadania treningowe, uzupełniające, dodatkowe

2.18. a) Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym, takim że dla każdego $c \in \mathbb{R}$ część wspólna prostej $\{(c, y) : y \in \mathbb{R}\}$ i zbioru U jest odcinkiem lub zbiorem pustym. Załóżmy, że funkcja $f : U \to \mathbb{R}$ spełnia $f'_y(x, y) = 0$ dla $(x, y) \in U$ (pochodna cząstkowa istnieje w każdym punkcie dziedziny i jest równa 0). Uświadomić sobie, że, że wówczas funkcja f nie zależy od zmiennej y, tzn. jeśli $(x, y_1), (x, y_2) \in U$, to $f(x, y_1) = f(x, y_2)$.

b) Niech $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0 \text{ oraz } y = 0\}$. Podać przykład [możliwie prostej] funkcji $g : \mathbb{R}^2 \setminus L \to \mathbb{R}$, która ma ciągłe pochodne cząstkowe oraz $g'_y(x, y) = 0$ dla każdego $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus L$, ale mimo to nie jest prawdą, że funkcja g nie zależy od zmiennej y (tzn. nie jest prawdą, że dla każdych $(x, y_1), (x, y_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus L$ mamy $g(x, y_1) = g(x, y_2)$).

2.19. Niech $U = \{(x, p, a, b, c) \in \mathbb{R}^5 : x > 0\}$ i niech $f(x, p, a, b, c) = x^p + b^2 - 4ac$ dla $(x, p, a, b, c) \in U$. Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji f.

∘ **2.20.** a) Obliczyć macierz Jacobiego i jakobian[2] przekształcenia

$$(r, \alpha) \mapsto (r \cos \alpha, r \sin \alpha).$$

b) Obliczyć macierz Jacobiego przekształcenia

$$(r, \alpha, \beta) \mapsto (r \cos \alpha \cos \beta, r \cos \alpha \sin \beta, r \sin \alpha).$$

W ramach autosprawdzenia sprawdzić, że kolumny macierzy Jacobiego są wektorami prostopadłymi. Następnie obliczyć jakobian (można do tego wykorzystać prostopadłość kolumn (jak zorientowana jest taka baza?)).

c) Zrozumieć interpretację geometryczną poprzedniego podpunktu (patrz Rysunek 2.1): punkt $(x, y, z) = (r \cos \alpha \cos \beta, r \cos \alpha \sin \beta, r \sin \alpha)$ spełnia $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, tzn. leży na sferze o promieniu r. Trzecia współrzędna, $z = r \sin(\alpha)$, może się zmieniać od $-r$ do r, więc $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ jest szerokością geograficzną. Z kolei $\beta \in [-\pi, \pi]$ jest długością geograficzną. Prostopadłość kolumn macierzy Jacobiego jest związana z tym, że promień sfery jest do niej prostopadły, więc jest prostopadły do południków i równoleżników, które też są wzajemnie prostopadłe.

d) Ewentualnie obliczyć macierz Jacobiego przekształcenia

$$(r, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}) \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_k),$$

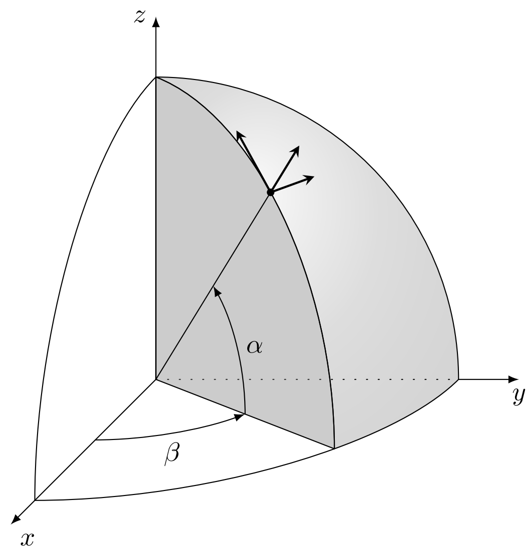
gdzie

$$x_1 = r \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \ldots \cos \alpha_{k-2} \cos \alpha_{k-1},$$

[2] Przypomnienie: macierz Jacobiego to macierz pochodnych cząstkowych (w i-tej kolumnie są pochodne cząstkowe po i-tej zmiennej), jakobian to jej wyznacznik.

$$\begin{aligned}
x_2 &= r\cos\alpha_1\cos\alpha_2\ldots\cos\alpha_{k-2}\sin\alpha_{k-1},\\
x_3 &= r\cos\alpha_1\cos\alpha_2\ldots\sin\alpha_{k-2},\\
&\vdots\\
x_{k-1} &= r\cos\alpha_1\sin\alpha_2,\\
x_k &= r\sin\alpha_1.
\end{aligned}$$

W ramach autosprawdzenia, sprawdzić, że kolumny macierzy Jacobiego są wektorami prostopadłymi. Następnie obliczyć jakobian.



Rysunek 2.1.: Współrzędne biegunowe z zadania 2.20 b). Zaznaczone wektory to kolumny macierzy Jacobiego (przeskalowane dla zwiększenia czytelności). Zaadaptowane z [Juan Castaño, How to draw a 3D sphere and a 3D cone for Spherical coordinates, `https://tex.stackexchange.com/questions/676181/`, licensed under CC BY-SA 3.0].

2.21. Funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $(1,1)$ i $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2$. Ponadto $f(x,x^2) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Znaleźć $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$. Znaleźć również pochodną kierunkową funkcji f w punkcie $(1,1)$ w kierunku wektora $(-1,1)$.

2.22. Dane są funkcje $F\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ oraz $G\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$. Uzasadnić, że funkcja $(F,G)\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{l+m}$ jest różniczkowalna w punkcie $p \in \mathbb{R}^k$ wtedy i tylko wtedy gdy, $F\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ oraz $G\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ są różniczkowalne w punkcie $p \in \mathbb{R}^k$. Jak różniczka funkcji (F,G) wyraża się w terminach różniczek F oraz G?

Uwaga. To prawie na pewno było w jakiejś postaci dowodzone na wykładzie, ale warto to jeszcze raz przemyśleć.

2.23. Zbadać, w których punktach płaszczyzny różniczkowalne są funkcje:

$$f(x,y) = \frac{xy}{1+|x-y|},$$
$$g(x,y) = \ln(1+|xy|^p) \quad (p>0 \text{ jest parametrem}),$$
$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y}(e^{xy}-1) & \text{jeśli } y \neq 0, \\ x & \text{jeśli } y = 0. \end{cases}$$

Plan pracy. Jest jasne, że w niektórych punktach trzeba sprawdzać istnieje pochodnych cząstkowych i różniczkowalność z definicji. Punkt $(0,0)$ może wymagać dodatkowej czujności – rachunki mogą być nieco inne (niekoniecznie trudniejsze).

W ramach autosprawdzenia. W przypadku fukcji g parametr p wpływa na odpowiedź (przynajmniej w niektórych punktach).

2.24. Czy funkcja $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^4} - \sqrt{x^2+y^6}$ jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$?

○ **2.25.** Podać przykłady pokazujące, że w poniższym ciągu warunków żaden warunek nie jest równoważny poprzedniemu.

(i) pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k}$ istnieją w pewnym otoczeniu p i są ciągłe w p,
(ii) funkcja f jest różniczkowalna w punkcie p,
(iii) dla każdego $v \in \mathbb{R}^k$ pochodna kierunkowa $f'_v(p)$ istnieje oraz $f'_v(p)$ zależy liniowo od v oraz funkcja f jest ciągła w punkcie p,
(iv) dla każdego $v \in \mathbb{R}^k$ pochodna kierunkowa $f'_v(p)$ istnieje oraz $f'_v(p)$ zależy liniowo od v,
(v) dla każdego $v \in \mathbb{R}^k$ pochodna kierunkowa $f'_v(p)$ istnieje,
(vi) pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k}$ istnieją w punkcie p.

(Wszędzie zakładamy, że funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu punktu $p \in \mathbb{R}^k$; wymiary przestrzeni można w każdym z przykładów wybrać dowolnie).

Wskazówka. Większość przykładów można pewnie odnaleźć w materiałach z zajęć (wykład, zadania z ćwiczeń, zadania z pracy domowej, inne zadania z tego pliku).

2.26 (déjà vu?)**.** Funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest zdefiniowana wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2\sin(1/x) + y^2\sin(1/y) & \text{jeśli } xy \neq 0, \\ x^2\sin(1/x) & \text{jeśli } y=0 \text{ oraz } x \neq 0, \\ y^2\sin(1/y) & \text{jeśli } x=0 \text{ oraz } y\neq 0, \\ 0 & \text{jeśli } x=y=0. \end{cases}$$

Uświadomić sobie, że funkcja f ma pochodne cząstkowe [wszędzie], ale nie są one ciągłe w punkcie $(0,0)$. Uzasadnić, że f jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$.

2.27. Rozważmy funkcję $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Sprawdzić, że pochodne cząstkowe funkcji f istnieją [w każdym punkcie płaszczyzny].

ą) Sprawdzić, że pochodne cząstkowe funkcji f są ograniczone na $\mathbb{R}^2$. Przypomnieć sobie, że z tego wynika, że funkcja f jest lipschitzowska.

b) Sprawdzić, że dla każdego wektora $v \in \mathbb{R}^2$, $\|v\|_2 = 1$, istnieje pochodna kierunkowa $f'_v(0,0)$ oraz $|f'_v(0,0)| \leqslant 1$.

c) Załóżmy, że $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ jest funkcją różniczkowalną, taką że $\gamma(0) = (0,0)$ oraz $D\gamma(0) \neq (0\ 0)$.[3] Sprawdzić [z definicji], że funkcja $t \mapsto f(\gamma(t))$ jest różniczkowalna w $t = 0$.

d) Uzasadnić, że funkcja f *nie* jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$.

2.28. Wyznaczyć wszystkie punkty, w których funkcja $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x_1, \ldots, x_k) = |x_1 \ldots x_k|$ nie jest różniczkowalna.

○ **2.29** (dość ważne). a) Niech $f(x) = \|x\|_2^2$ dla $x \in \mathbb{R}^k$. Znaleźć $\nabla f(x)$ – odpowiedź wyrazić bez odwoływania się do współrzędnych punktu x.

b) Niech A będzie pewną macierzą rozmiaru $k \times k$ o współczynnikach rzeczywistych. Niech $g(x) = \langle Ax, x\rangle$ dla $x \in \mathbb{R}^k$. Znaleźć $\nabla g(x)$ – odpowiedź wyrazić bez odwoływania się do współrzędnych punktu x. *Silna sugestia.* Przeprowadzić rachunki bez odwoływania się w ogóle do współrzędnych punktu x czy współczynników macierzy A.

○ **2.30.** Rozważamy przestrzeń $M_{k\times k}(\mathbb{R})$ (macierze wymiaru $k \times k$ o wyrazach rzeczywistych), którą utożsamiamy z $\mathbb{R}^{k^2}$; $I \in M_{k\times k}(\mathbb{R})$ to macierz jednostkowa.

a) Wykazać, że dla $A \in M_{k\times k}(\mathbb{R})$,

$$D\det(I)A = \operatorname{tr}(A)$$

(funkcja $\det\colon \mathbb{R}^{k^2} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie I, a jej różniczka w tym punkcie (tj. $D\det(I)$) jest przekształceniem liniowym z $\mathbb{R}^{k^2}$ w $\mathbb{R}$ zadanym przez $A \mapsto \operatorname{tr}(A)$).

Koło ratunkowe. Może być łatwiej zacząć od przypadku $k = 2$ lub 3.

b) Wykazać, że jeśli macierz $B \in M_{k\times k}(\mathbb{R})$ jest odwracalna, to

$$D\det(B)A = \det(B)\operatorname{tr}(B^{-1}A)$$

dla $A \in M_{k\times k}(\mathbb{R})$.

2.31. Rozważamy przestrzeń $M_{k\times k}(\mathbb{R})$ (macierze wymiaru $k \times k$ o wyrazach rzeczywistych); $I \in M_{k\times k}(\mathbb{R})$ to macierz jednostkowa. Niech

$$U = \{A \in M_{k\times k}(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\},$$

i niech $\Phi\colon U \to U$ będzie dane wzorem $\Phi(A) = A^{-1}$ dla $A \in U$. Poniżej $\|\cdot\|_{2\to 2}$ to norma operatorowa (patrz zadanie 1.16), ale proszę pamiętać, że przestrzeń $M_{k\times k}(\mathbb{R})$ można utożsamić z $\mathbb{R}^{k^2}$, więc wszystkie normy są równoważne.

[3] Krzywa γ jest postaci $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ dla pewnych funkcji $u, v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Różniczkowalność γ [jako przekształcenia z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}^2$] oznacza dokładnie, że funkcje u, v są różniczkowalne. Warunek niezerowania się różniczki γ w punkcie $t = 0$ oznacza dokładnie, że $(u'(0), v'(0)) \neq (0,0)$.

a) Wykazać, że jeśli macierz $B \in M_{k\times k}(\mathbb{R})$ spełnia $\|B\|_{2\to 2} < 1$, to macierz $I - B$ jest odwracalna oraz

$$(I - B)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B^n.$$

Uświadomić sobie, że to w szczególności oznacza, że I należy do wnętrza zbioru U.

b) Sprawdzić, że przekształcenie Φ jest różniczkowalne w I oraz

$$D\Phi(I)B = -B$$

(różniczka Φ w punkcie I to przekształcenie liniowe z $M_{k\times k}(\mathbb{R})$ w $M_{k\times k}(\mathbb{R})$ zadane przez $B \mapsto -B$).

c) Uświadomić sobie, że U jest otwartym podzbiorem $M_{k\times k}(\mathbb{R})$. Sprawdzić, że przekształcenie Φ jest różniczkowalne oraz dla $A \in U$ zachodzi

$$D\Phi(A)B = -A^{-1}BA.$$

○ **2.32** (por. zadanie 2.13). *Motywacja.* Zadanie 2.13 w podanej wyżej wersji (sprawdzić, że podana funkcja ma jakieś własności) jest łatwe, ale byłoby chyba trudnawe, gdyby sformułować je: „Rozstrzygnąć, czy istnieje funkcja, taka że . . . ”. Poniżej alternatywne i chyba bardziej wymyślalne podejście do konstrukcji funkcji o odpowiednich własnościach.

a) Niech $g(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Sprawdzić, że funkcja g ma dokładnie dwa punkty krytyczne i że w jednym z nich jest minimum lokalne, a drugi jest punktem siodłowym. Sprawdzić też, że funkcja g nie jest ograniczona ani z góry, a ani z dołu.

b) Niech $f(x, y) := g(x, e^y) = x^3 + e^{3y} - 3xe^y$ dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Sprawdzić, że funkcja f ma dokładnie jeden punkt krytyczny i uzasadnić, że ma w nim minimum lokalne. Sprawdzić też, że funkcja f nie jest ograniczona ani z góry, ani z dołu.

Komentarz. Dobrze by było spróbować wyobrazić sobie, co się stało i jak wygląda wykres funkcji f. Funkcja f ma jedno minimum lokalne i nie jest ograniczona z góry – to nie jest dziwne. Dziwniejsze jest to, że z tego minimum lokalnego funkcja f jest w stanie wykręcić tak, by zejść z wartościami do $-\infty$, i odbywa się bez przechodzenia przez punkty krytyczne (siodła lub maksima lokalne). Punkt siodłowy funkcji g został wysłany do „[minus?] nieskończoności”, na „brzeg” płaszczyzny ($\lim_{y\to-\infty} e^y = 0$). Siodła już nie mamy, ale w pewnym sensie można do niego podejść i to wystarcza. [Lepsze intuicje chętnie przyjmę].

2.33 (por. zadanie 2.12). Niech

$$f(x, y) = \begin{cases} \big(y - \exp(-1/x^2)\big)\big(y - 3\exp(-1/x^2)\big) & \text{dla } x \neq 0,\ y \in \mathbb{R}, \\ y^2 & \text{dla } x = 0,\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Sprawdzić, że funkcja f ma po obcięciu do dowolnej krzywej postaci $y = cx^{m/n}$ ($c \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}$ – względnie pierwsze, $x \geqslant 0$ w przypadku gdy n jest parzyste) minimum lokalne w punkcie $(0, 0)$, ale punkt $(0, 0)$ nie jest minimum lokalnym funkcji f.

2.34. Wykazać, że funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x,y) = (1+e^y)\cos(x) - ye^y$$

ma nieskończenie wiele maksimów, ale nie ma żadnego minimum lokalnego.

2.35. Niech $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant 0\}$, $f(x,y) = \frac{x-2y}{8+x^2+4y^2}$ dla $(x,y) \in A$. Wyznaczyć $\sup_A f$, $\inf_A f$.

2.36. Niech $A = [0,\infty)^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f(x,y) = \frac{xe^{-y}\sqrt{y}}{x^2+y}$ dla $(x,y) \in A$. Wyznaczyć $\sup_A f$, $\inf_A f$.

2.37. Znaleźć kresu funkcji $f(x,y,z) = 6xy - 3xz - 2yz$ na zbiorze $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$.

2.38. Niech $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9x \geqslant 4y \geqslant 0\}$, $f(x,y) = \frac{x^2ye^{-xy}}{x+1}$ dla $(x,y) \in A$. Wyznaczyć $\sup_A f$, $\inf_A f$.

2.39. Niech $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = 4+x^2+y^2\}$. Znaleźć w zbiorze A punkt, którego odległość od punktu $(2,4,0)$ jest najmniejsza.

2.40. Spośród basenów prostopadłościennych o ustalonej objętości $V > 0$ znaleźć basen o najmniejszym polu powierzchni (podstawa plus cztery ściany boczne).

2.41. Dana jest macierz nieosobliwa A rozmiaru $k \times k$ o współczynnikach rzeczywistych i wektor $b \in \mathbb{R}^k$. Niech $f(x) = \|Ax\|^2 - 2\langle Ax, b\rangle$ dla $x \in \mathbb{R}^k$. Wykazać, że f osiąga swoje minimum globalne w dokładnie jednym punkcie.

Drobna wskazówka. Jeśli będą kłopoty rachunkowe, to warto najpierw zrobić zadanie 2.29.

2.42 (fajne)**.** Ustalmy dwa punkty $a, b \in \mathbb{R}^3$, $a \neq b$, i niech

$$f(x) = \frac{1}{\|x-a\|_2} + \frac{1}{\|x-b\|_2} \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{a,b\}.$$

Znaleźć punkty krytyczne funkcji f.

2.43. Funkcja $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i spełnia warunek:

$$\sum_{j=1}^{k} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \geqslant 0 \qquad \text{dla każdego } x = (x_1, \ldots x_k) \in \mathbb{R}^k.$$

Wykazać, że funkcja f jest ograniczona z dołu.

2.44 (kolokwium 2010)**.** Zbiór $A \subset \mathbb{R}^k$ jest zwarty i wypukły. Funkcja $f\colon A \to \mathbb{R}$ jest ciągła na A i różniczkowalna w $\operatorname{int} A$. Ponadto istnieją liczby $a_1, \ldots, a_k$, nie wszystkie równe 0, takie że

$$\sum_{j=1}^{k} a_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \leqslant 0 \qquad \text{dla każdego } x = (x_1, \ldots x_k) \in \operatorname{int} A.$$

Wykazać, że funkcja f osiąga swoją wartość największą i najmniejszą w pewnych punktach brzegu zbioru A.

2.45. Niech $p > 0$. Mówimy, że funkcja funkcja $f\colon (0,\infty)^k \to \mathbb{R}$ jest jednorodna stopnia p, jeśli dla każdego $x \in (0,\infty)$ i każdego $\lambda > 0$ zachodzi $f(\lambda x) = \lambda^p f(x)$.

a) Wykazać, że jeśli funkcja $f\colon (0,\infty)^k \to \mathbb{R}$ jest jednorodna stopnia p i różniczkowalna, to spełnia warunek:

$$\sum_{j=1}^{k} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = pf(x) \qquad \text{dla każdego } x = (x_1, \dots x_k) \in (0,\infty)^k. \tag{2.1}$$

b) Odwrotnie, pokazać że jeśli różniczkowalna funkcja $f\colon (0,\infty)^k \to \mathbb{R}$ spełnia warunek (2.1) [dla pewnego $p > 0$], to jest jednorodna stopnia p.

Uwaga. W podpunkcie b) zapewne pojawi się potrzeba skorzystania z jakiejś wiedzy z RRZ – można na kredyt przyjąć, że rozwiązanie, które Państwo zgadną, jest jedyne (z dokładnością do mnożenia przez stałą) i że nie ma żadnych problemów.

2.46. Dana jest funkcja różniczkowalna $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Wiadomo, że:

- gradient funkcji f w punkcie $(0,0,0)$ to wektor $(1,1,1)$,
- gradient funkcji f w punkcie $(1,1,1)$ to wektor $(1,2,3)$,
- gradient funkcji f w punkcie $(1,2,3)$ to wektor $(0,0,0)$,
- gradient funkcji f w punkcie $(e+1,e+1,e+1)$ to wektor $(-1,-1,-1)$.

Funkcja $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$g(x,y,z) = f(e^x + y, e^z + x, e^y + z).$$

Znaleźć gradient funkcji g w punkcie $(0,0,0)$ oraz pochodną kierunkową funkcji g w punkcie $(0,0,0)$ względem wektora $(1,1,1)$.

○ **2.47.** Funkcja $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest zadana wzorem

$$F(x,y) = (e^x + e^{2y} + x^3y^4e^{xy}, \sin(3x) + 4y + x^5 + \cos^6(y)).$$

a) Uzasadnić, że funkcja F jest różniczkowalna.

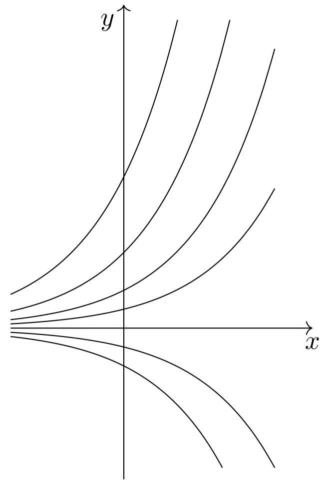
b) Wiadomo, że istnieją zbiory otwarte $U, V \subset \mathbb{R}^2$, takie że $(0,0) \in U$, $(2,1) \in V$, funkcja F jest różnowartościowa na U, $F(U) = V$, zaś funkcja $G := (F_{|U})^{-1}\colon V \to U$ jest różniczkowalna. Wyznaczyć różniczkę funkcji G w punkcie $(2,1)$.

Komentarz. Żeby uzasadnić część „Wiadomo ...” potrzeba twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym, którego jeszcze nie znamy, ale jeśli założymy istnienie i różniczkowalność G, to do znalezienia $DG(2,1)$ wystarczy nam twierdzenie o różniczce funkcji odwrotnej lub o różniczce złożenia, z którego wynika wzór na różniczkę funkcji odwrotnej (nawet jeśli funkcja G nie wypisuje się jawnym wzorem).

○ **2.48** (c.d. zadania 2.16)**.** b) Funkcja $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, a jej pochodne cząstkowe spełniają zależności

$$y\frac{\partial g}{\partial x} = x\frac{\partial g}{\partial y}, \qquad z\frac{\partial g}{\partial y} = y\frac{\partial g}{\partial z}, \qquad x\frac{\partial g}{\partial z} = z\frac{\partial g}{\partial x}.$$

Udowodnić, że $g(x,y) = \varphi(x^2 + y^2 + z^2)$ dla pewnej funkcji $\varphi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ (ciągłej, różniczkowalnej na $(0,\infty)$).



Rysunek 2.2.: Charakterystyki z zadania 2.50

c) Jak zmieni się teza, jeśli założymy, że

$$2y\frac{\partial g}{\partial x} = x\frac{\partial g}{\partial y}, \qquad 3z\frac{\partial g}{\partial y} = 2y\frac{\partial g}{\partial z}, \qquad x\frac{\partial g}{\partial z} = 3z\frac{\partial g}{\partial x} \ ?$$

d) Jak uogólnić treść z podpunktów a), b) na przypadek $\mathbb{R}^k$?

2.49. Funkcja $g\colon \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i spełnia równanie

$$xg'_x + 2yg'_y = 0.$$

Udowodnić, że $g(x,y) = \varphi(y^2/x)$ dla pewnej różniczkowalnej funkcji $\varphi\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$.

2.50 (metoda charakterystyk)**.** Znaleźć różniczkowalną funkcję $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spełniającą warunki

$$\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad u(0,y) = \ln(1+y^2).$$

W tym celu postąpić następująco. Dla każdego punktu $(0,c)$ znaleźć tzw. charakterystykę, tzn. – w naszym przypadku – krzywą postaci $x \mapsto (x, \psi(x))$, która spełnia $\psi'(x) = \psi(x)$ i przechodzi przez punkt $(0,c)$. Sprawdzić, że funkcja $x \mapsto u(x,\psi(x))$ jest stała. Następnie dla każdego punktu (x,y) dobrać takie c, by charakterystyka wypuszczona z punktu $(0,c)$ przechodziła przez (x,y) i wyznaczyć wzór jawny na u.

Komentarz. Podobne rozumowanie można też stosować w przypadku bardziej skomplikowanych równań różniczkowych [cząstkowych] (będzie na RRCz) .

○ **2.51** (kształcące)**.** Funkcje $f_{i,j}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i,j \in \{1,\dots,k\}$, sa różniczkowalne. Kładziemy

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} f_{1,1}(x) & \dots & f_{1,k}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{k,1}(x) & \dots & f_{k,k}(x) \end{pmatrix} \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Zrozumieć, że $\frac{d}{dx}\det(\varphi(x))$ jest równe sumie k wyznaczników: i-ty z nich powstaje przez zastąpienie i-tego wiersza $\varphi(x)$ przez $(f'_{i,1}(x), \dots, f'_{i,k}(x))$.

Plan pracy. Przypomnieć sobie, że wyznacznik jest wieloliniową funkcją wierszy macierzy. Zastosować twierdzenia o różniczce złożenia i pochodnej przekształcenia wieloliniowego.

2.52. Funkcja $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ jest zadana wzorem

$$f(x_1, \dots, x_k) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \dots & x_k^{k-1} \end{pmatrix}.$$

a) Uzasadnić możliwie krótko (najlepiej jednym słowem – jakim?), że funkcja f jest różniczkowalna.

b) Niech $v = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^k$. Wykazać, że $f'_v(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^k$.

2.53. Podać przykład funkcji różniczkowalnej $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ i punktów $x, y \in \mathbb{R}$, dla których w twierdzeniu Lagrange'a o wartości średniej mamy ostrą nierówność.

3. Pochodne wyższych rzędów

Materiał do omówienia na zajęciach [3+ ćw. (?)]

Teoria (déjà vu?). Jeśli funkcja jest odpowiednio porządna, to po policzeniu pochodnej cząstkowej, możemy dalej różniczkować (po tej samej lub po innej zmiennej). Piszemy $f'''_{xyz} := ((f'_x)'_y)'_z$ lub $\frac{\partial^3}{\partial z \partial y \partial x} f := \frac{\partial}{\partial z}\big(\frac{\partial}{\partial y}\big(\frac{\partial}{\partial x} f\big)\big)$ i $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f := \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} f$.

• **3.1.** a) Niech $f(x, y) = x^2 e^{3y} + \sin(4x)$. Obliczyć f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy}.
b) Niech

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Znaleźć $g''_{xy}(0, 0)$ oraz $g''_{yx}(0, 0)$.

Teoria. Twierdzenie Schwarza[1] [o równości pochodnych mieszanych].[2]

○ **3.2.** a) Czy istnieje funkcja różniczkowalna $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spełniająca

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 + 2xy^3 + e^x \sin(y),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2y^2 + 4y + e^x \cos(y)\,?$$

b) Czy istnieje funkcja różniczkowalna $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spełniająca

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = e^x \cos(y), \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = e^x \sin(y)\,?$$

c+) Patrz zadania 3.13, 3.14.

Teoria. Dwukrotna różniczkowalność (patrz też: zadania 3.18, 3.19). Twierdzenia Schwarza [o symetrii drugiej różniczki].

Teoria. Różniczki jeszcze wyższych rzędów. Symetria n-tej różniczki. Funkcje klasy C^r.

○ **3.3** (wcale nie takie straszne)**.** a) Załóżmy, że funkcje $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$, $g\colon \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ są dwukrotnie różniczkowalne. Dla $x \in \mathbb{R}^k$ znaleźć $D^2(g \circ f)(x)$, tzn. dla dowolnych wektorów $u, v \in \mathbb{R}^k$ wyznaczyć $D^2(g \circ f)(x)(u, v)$.

---

[1] W literaturze angielskiej można się też spotkać z nazwami: Clairaut's theorem, Young's theorem.
[2] Jeden z możliwych zestawów założeń: f klasy C^1, jedna z pochodnych mieszanych istnieje i jest ciągła.

Koło ratunkowe. Jeśli $k = l = m = 1$, to bez trudu można policzyć $(g(f(x))''$ – zrobić to (AM 1). Przez analogię można zapostulować wzór na $D^2(g \circ f)(x)(u, v)$ – trzeba pamiętać, że drugie różniczki [w danym punkcie] to przekształcenia dwuliniowe, więc trzeba je nakarmić dwoma wektorami, i trzeba przypilnować, żeby napisy się parsowały (wymiary i dziedziny wszystkiego muszą się zgadzać).

b) Ewentualnie, dla $u, v, w \in \mathbb{R}^k$ wyznaczyć $D^3(g \circ f)(x)(u, v, w)$ [przy założeniu, że f, g są trzykrotnie różniczkowalne].

***

Teoria (déjà vu?). Praktyczne wnioski ze wzoru Taylora – macierz drugiej różniczki a ekstrema lokalne (funkcja dwukrotnie różniczkowalna o wartościach rzeczywistych, $D^2 f$ jest symetryczna, więc ma rzeczywiste wartości własne). Kryterium Sylvestera.

Uwaga. Ważne przykłady, które trzeba mieć w pamięci: $x^2 + y^2$, $-x^2 - y^2$, $x^2 - y^2$, $x^4 + y^4$, $-x^4 - y^4$, $x^4 - y^4$ w otoczeniu $(0, 0)$.

• **3.4.** Znaleźć punkty krytyczne funkcji

$$f(x, y) = x^4 - y^4 - 4x^3 + 4xy^2 + 4x^2 - 4y^2$$

i rozstrzygnąć, czy są w nich lokalne ekstrema.

• **3.5.** Niech $f(x, y, z) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(z) - \sin(x + y + z)$.
a) Wyznaczyć punkty krytyczne funkcji f.
b) Czy w punktach $(0, 0, 0)$ i (π, π, π) funkcja ma lokalne ekstrema?
c) Czy w punkcie $(\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$ funkcja ma lokalne ekstremum?
d) Czy w punkcie $(1, 1, -1)$ funkcja ma lokalne ekstremum?

Teoria. Wzór Taylora [dokładniej]. Wielowskaźniki (multiindeksy).

• **3.6.** Niech $f(x, y, z) = \sin(x)e^{y-z}$ dla $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
a) Wypisać [z definicji] wielomian Taylora drugiego stopnia, $T_2(x, y, z)$, dla funkcji f wokół punktu $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$.
b) Dla $|x|, |y|, |z| \leqslant \delta$ podać konkretne szacowanie $|f(x, y, z) - T_2(x, y, z)|$.
c) Wypisać [w dowolny sposób] wielomian Taylora trzeciego stopnia, $T_3(x, y, z)$, dla funkcji f wokół punktu $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$.

◦ **3.7.** W zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ ustalić, czy funkcja

$$f(x, y) = \cos(x + y) + a\,\mathrm{tg}(xy), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

ma w punkcie $(0, 0)$ ekstremum lokalne (i jakie) czy też go nie ma.

Zadania treningowe, uzupełniające, dodatkowe

3.8 (powtórka z GALu). Przypomnieć sobie z GALu materiał dotyczący form kwadratowych: macierze symetryczne, kongruencja macierzy, diagonalizacja przez kongruencje, sygnatura formy kwadratowej itp.

3.9. a) Niech $f(x,y) = y^3 - 3x^2y$ dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Sprawdzić, że $f''_{xx} + f''_{yy} = 0$.

b) Niech $g(x,y) = e^x \cos(y)$ dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Sprawdzić, że $g''_{xx} + g''_{yy} = 0$.

c) Niech $h(x,y) = \ln((x^2+y^2)^{1/2})$ dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Sprawdzić, że $h''_{xx} + h''_{yy} = 0$.

3.10. Załóżmy, że dla funkcji $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pochodna mieszana $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial x} f)$ istnieje wszędzie i ciągła. Czy wynika z tego istnienie $\frac{\partial}{\partial y} f$?

3.11 (siodło dla… modliszki?)**.** *Motywacja.* Na wykładzie pojawiła się funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{jeśli } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{jeśli } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

dla której $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1 \neq 1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ (przykład Peano). Niniejsze zadanie ma być [częściową] próbą zrozumienia, jak wygląda wykres tej funkcji i dlaczego pochodne mieszane są różne.

a) Wypisać $f(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ i uprościć wynik.

b) Zrozumieć, jak wygląda wykres funkcji f: gdy r jest ustalone i α zmienia się od 0 do 2π, to wartości $f(r\cos\alpha, r\sin(\alpha))$ zmieniają się okresowo i mamy cztery maksima („górki") i cztery minima („dołki"). Zatem, jeśli uwzględnimy zmianę r to zobaczymy powierzchnię, które ma cztery „grzbiety" („fałdy"?), a pomiędzy nimi cztery „doliny". Powierzchnia ta wygląda nieco jak siodło, tylko takie dla stworzenia, które ma cztery nogi (mogłaby w nim siedzieć np. modliszka – cztery odnóża w czterech strzemionach, lejce trzymane w pierwszej parze odnóży, która jest przekształcona w narząd chwytny (być może byłoby jej niewygodnie z odwłokiem, ale trudno)).

c) Uświadomić sobie, że jeśli obrócimy wykres funkcji f [w $\mathbb{R}^3$] wokół osi OZ o $90°$, to otrzymamy tę samą powierzchnię. Przy takim obrocie oś OX przejdzie na oś OY, zaś oś OY – na *minus* oś OX.

TODO d) [under construction] Nasza funkcja spełnia $f(x,y) = f(-y,x)$. Zrozumieć, że stąd wynika, że $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$. Spróbować to zrozumieć również czysto geometrycznie, korzystając z poprzedniego podpunktu c)… (?)

e) Czy da się jakoś łatwo – z pomocą wykresu, ale bez rachunków – zrozumieć, dlaczego $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq 0$? (??)

3.12 (Schwarz, 1873)**.** Funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest dana wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \operatorname{arc\,tg}(y/x) - y^2 \operatorname{arc\,tg}(x/y) & \text{jeśli } xy \neq 0, \\ 0 & \text{jeśli } xy = 0. \end{cases}$$

Obliczyć $f''_{xy}(0,0)$ oraz $f''_{yx}(0,0)$.

○ **3.13** (por. zad. 3.14)**.** Funkcje $f_1, f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ są klasy C^1 i spełniają zależność

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)$$

[dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}^2$]. Wykazać, że istnieje funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ klasy C^2, taka że

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_2(x,y).$$

Wskazówka. Jeśli istniałaby taka funkcja f, to wtedy można by zapisać

$$f(x,y) = f(0,0) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(s,0)ds + \dots$$

(być może dobrze jest zrobić rysunek, żeby zrozumieć, co (i dlaczego) będzie w miejscu wielokropka).

○ **3.14** (por. zad. 3.13)**.** Sprawdzić, że funkcje $f_1, f_2\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ dane wzorami

$$f_1(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}, \qquad f_2(x,y) = -\frac{x}{x^2+y^2},$$

spełniają [dla wszystkich $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$] zależność

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y).$$

Uzasadnić, że *nie* istnieje funkcja różniczkowalna $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ taka że

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_2(x,y).$$

Wskazówka. Rozważyć $g(t) = f(\cos t, \sin t)$.

3.15 (równania Cauchy'ego–Riemanna)**.** Funkcje $u, v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ są dwukrotnie różniczkowalne i spełniają $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$ [we wszystkich punktach dziedziny]. Sprawdzić, że $u''_{xx} + u''_{yy} = 0 = v''_{xx} + v''_{yy}$.

3.16. *Oznaczenia i terminologia.* Dany jest zbiór otwarty $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (współrzędne oznaczamy x_1, x_2, x_3). Pole wektorowe to funkcja określona na Ω o wartościach w $\mathbb{R}^3$.

Rotacją pola wektorowego $F = (F_1, F_2, F_3)\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ [klasy C^1] nazywamy pole wektorowe

$$\operatorname{rot} F = \Big(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\Big)$$

(kilka uwag pobocznych w stopce[3]). Jeśli $\operatorname{rot} F = (0,0,0)$ [we wszystkich punktach zbioru Ω], to mówimy, że pole F jest bezwirowe.

Jeśli istnieje funkcja $U\colon \Omega \to \mathbb{R}$ [klasy C^1], taka że $F = \nabla U$, to mówimy, że F jest polem gradientowym, a funkcję U nazywamy potencjałem tego pola.

a) Załóżmy, że pole wektorowe $F = (F_1, F_2, F_3)\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ klasy C^1 jest polem gradientowym pewnego potencjału $U\colon \Omega \to \mathbb{R}$ klasy C^2: $F = \nabla U$. Uzasadnić, że wówczas $\operatorname{rot} F = (0,0,0)$.

[3] Formalnie mamy $\operatorname{rot} F = \nabla \times F = [\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}] \times [F_1, F_2, F_3]$ (iloczyn wektorowy). Inne oznaczenie na rotację to $\operatorname{curl} F$.

b) Załóżmy, że zbiór $\Omega \in \mathbb{R}^3$ jest gwiaździsty, tzn. istnieje punkt $x_0 \in \Omega$, taki że dla każdego $x \in \Omega$ odcinek łączący punkty x i x_0 jest zawarty w Ω. Załóżmy, że pole wektorowe $F = (F_1, F_2, F_3)\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ klasy C^1 jest bezwirowe: $\operatorname{rot} F = (0,0,0)$. Uzasadnić, że fukcja $U\colon \Omega \to \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$U(x) := \int_0^1 \langle f(x_0 + t(x - x_0)), x - x_0 \rangle dt.$$

jest potencjałem pola wektorowego F.

3.17. Niech $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. Funkcja $f\colon A \to \mathbb{R}$ jest klasy C^2 i spełnia równanie $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ [dla wszystkich $(x,y) \in A$]. Ponadto wiadomo, że dla wszystkich $x > 0$ zachodzi

$$f(x, e^x) = \sin x, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x, e^x) = \frac{1}{2}\cos x.$$

Obliczyć macierz drugich pochodnych cząstkowych funkcji f w punkcie (x, e^x) dla $x > 0$ (lub ewentualnie wykazać, że nie istnieje funkcja spełniająca założenia zadania).

Sugestia. Być może warto najpierw zerknąć na zadanie 2.21. Ponadto być może opłaca się wprowadzić funkcję jednej zmiennej $g(x) = f(x, e^x)$ (a może lepiej $g(t) = f(t, e^t)$?).

○ **3.18** (wokół definicji drugiej różniczki, cz. 1)**.** *Motywacja.* Przy okazji definicji różniczek wyższych rzędów pojawiają się przekształcenia wieloliniowe (i przekształcenia liniowe o wartościach w przestrzeni przekształceń liniowych). To zadanie ma pomóc w oswojeniu się z tymi obiektami.

Notacja. Przez $L(V, W)$ oznaczamy przestrzeń przekształceń linowych z przestrzeni liniowej V w przestrzeń liniową W. Przez $L(V_1, \ldots, V_n; W)$ oznaczamy przestrzeń przekształceń n-liniowych z przestrzeni liniowej $V_1 \times \cdots \times V_n$ w przestrzeń liniową W.

a) Przemyśleć, że przestrzenie liniowe $L(\mathbb{R}^{k_1}, L(\mathbb{R}^{k_2}, \mathbb{R}^l))$ oraz $L(\mathbb{R}^{k_1}, \mathbb{R}^{k_2}; \mathbb{R}^l)$ są izomorficzne. W tym celu zrozumieć, że jest jeden rozsądny i kanoniczny sposób wypisania izomorfizmu (oraz izomorfizmu odwrotnego) między tymi przestrzeniami. [W razie potrzeby skonsultować się np. z notatkami do wykładu lub wybranym skryptem.]

ą) Przypomnieć sobie również definicję normy przekształcenia liniowego i wieloliniowego i sprawdzić, że wypisane izomorfizmy są izometriami.

b) Ewentualnie przemyśleć, że przestrzenie liniowe

$$L\big(\mathbb{R}^{k_1}, L\big(\mathbb{R}^{k_2}, L(\mathbb{R}^{k_3}, \mathbb{R}^l)\big)\big)$$

oraz $L(\mathbb{R}^{k_1}, \mathbb{R}^{k_2}, \mathbb{R}^{k_3}; \mathbb{R}^l)$ są izomorficzne.

c) Dane są przestrzenie liniowe V, W (powiedzmy skończeniewymiarowe). Dla $S \in L(V, W)$ oraz $T_1, T_2 \in L(W, V)$ kładziemy $g(T_1, T_2)(S) := T_1 S T_2$. Zrozumieć poniższe napisy [i sprawdzić ich poprawność]:

$$\begin{aligned} g(T_1, T_2) &\in L\big(L(V, W), L(W, V)\big), \\ g &\in L\Big(L(W, V), L(W, V);\ L\big(L(V, W), L(W, V)\big)\Big). \end{aligned}$$

○ **3.19** (wokół definicji $D^2 f$, cz. 2)**.** *Motywacja.* Poniższy tekst ma pomóc w przetrawieniu definicji drugiej różniczki z wykładu; na samym końcu jest tez minizadanko (podpunkt b). Pewnie warto najpierw zerknąć na zadanie 3.18.

Różniczkowalność (powtórzenie). Wszędzie poniżej zakładamy, że mamy funkcję $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$, różniczkowalną.[4] Dla każdego punktu $p \in \mathbb{R}^k$ istnieje więc przekształcenie liniowe $Df(p) \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)$. W bazach standardowych możemy utożsamiać je z macierzą rozmiaru $l \times k$; bierze ono wektor $h \in \mathbb{R}^k$ i zwraca wektor $Df(p)h \in \mathbb{R}^l$,

$$\mathbb{R}^k \ni h \longmapsto Df(p)h \in \mathbb{R}^l;$$

jest ono liniowym przybliżeniem naszej funkcji: $f(p+h) \approx f(p) + Df(p)h$.

Plan. Żeby zrozumieć, co to znaczy, że funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie p, musimy na pewno mieć $Df(x)$ określone w pewnym otoczeniu punktu p [u nas istnieje wszędzie], a dalej nadać jakiś sens przybliżonej równości

$$Df(p+h) \approx Df(p) + \ldots h$$

[m.in. zrozumieć, co wpisać w miejscu kropek].

Zależność od x. Rozważamy więc teraz funkcję, która punktowi $x \in \mathbb{R}^k$ przyporządkowuje przekształcenie liniowe $Df(x) \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)$. Oznaczamy tę funkcję przez

$$Df\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)$$

– jest ona zadana po prostu przez

$$\mathbb{R}^k \ni x \longmapsto Df(x) \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l).$$

Sama funkcja Df oczywiście [zazwyczaj] nie jest liniowa – dopiero jeśli nakarmimy ją argumentem $x \in \mathbb{R}^k$, to dostaniemy przekształcenie liniowe (które z kolei możemy nakarmić wektorem $h \in \mathbb{R}^k$, żeby dostać wektor w $\mathbb{R}^l$).

Formalna definicja. Ponieważ przestrzeń $L(\mathbb{R}^k; \mathbb{R}^l)$ możemy utożsamiać z $\mathbb{R}^{kl}$, to umiemy powiedzieć, co to znaczy, że funkcja Df jest różniczkowalna w jakimś punkcie swojej dziedziny. Mówimy zatem, że funkcja $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ jest dwukrotnie różniczkowalna w pewnym punkcie $p \in \mathbb{R}^k$, jeśli funkcja $Df\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)$ jest różniczkowalna w punkcie $p \in \mathbb{R}^k$.

Przejście do przekształceń dwuliniowych. Znaleziona w ten sposób różniczka

$$D^2 f(p) \coloneqq D(Df)(p)$$

to formalnie element przestrzeni $L\big(\mathbb{R}^k, L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)\big)$: jeśli nakarmimy ją wektorem $h_1 \in \mathbb{R}^k$, to dostaniemy przekształcenie liniowe (element przestrzeni $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)$), które dalej możemy nakarmić wektorem $h_2 \in \mathbb{R}^k$, żeby dostać wektor w $\mathbb{R}^l$. Ponieważ zależność i od h_1, i od h_2 jest liniowa (por. zadania 3.18 a)), to możemy – i będziemy tak robić – myśleć o $D^2 f(p)$ jako o elemencie przestrzeni $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k; \mathbb{R}^l)$, tj. jako o przekształceniu dwuliniowym

$$D^2 f(p)\colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$$

[4] Można założyć, że f jest określona na pewnym otwartym podzbiorze $U = \operatorname{int} U \subset \mathbb{R}^k$, ale będzie nam wygodniej śledzić wszystko dla $U = \mathbb{R}^k$.

(które trzeba nakarmić dwoma wektorami $h_1 \in \mathbb{R}^k, h_2 \in \mathbb{R}^k$, żeby dostać wektor w $\mathbb{R}^l$).

a) Spokojnie przemyśleć teorię z wykładu i krytycznie przeczytać odpowiednie fragmenty skryptu lub powyższy tekst.

∘ b) [Nadal przy założeniu, że $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ jest różniczkowalna [wszędzie]]. Ustalmy $p \in \mathbb{R}^k$. Udowodnić lub uzasadnić lub uświadomić sobie, że następujące warunki są równoważne:

(i) Funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie $p \in \mathbb{R}^k$ [w wyżej opisanym sensie].

(ii) Dla każdego ustalonego $h_1 \in \mathbb{R}^k$ funkcja $\mathbb{R}^k \ni x \longmapsto Df(x)h_1 \in \mathbb{R}^l$ jest różniczkowalna [jako przekształcenie z $\mathbb{R}^k$ w $\mathbb{R}^l$] w punkcie $p \in \mathbb{R}^k$.

3.20 (w miarę kształcące i ogólnorozwojowe). Poniżej pracujemy z [dwukrotnie różniczkowalnymi] funkcjami określonymi na $\mathbb{R}^k$, o wartościach rzeczywistych. Laplasjan to operator różniczkowy

$$\Delta \coloneqq \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_k^2},$$

czyli, dla $h\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ i $x \in \mathbb{R}^k$,

$$\Delta h(x) = \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}(x) + \cdots + \frac{\partial^2 h}{\partial x_k^2}(x).$$

Załóżmy, że macierz A, rozmiaru $k \times k$, jest ortogonalna: $AA^T = I$ [oraz $A^T A = I$], zaś funkcja $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna. Wykazać, że laplasjan jest niezmienniczy przy ortogonalnej zamianie zmiennych:

$$\Delta(f \circ A) = (\Delta f) \circ A,$$

tzn., jeśli oznaczymy $g(x) \coloneqq (f \circ A)(x) = f(Ax)$ dla $x \in \mathbb{R}^k$, to

$$\Delta g(x) = \big(\Delta(f \circ A)\big)(x) = \big(\Delta f\big)(Ax).$$

Plan pracy i sugestia. Można – ale proszę raczej tego nie robić – rozpisać wszystko we współrzędnych $A = (a_{ij})$, $g(x) = f((\sum_j a_{ij}x_j)_i)$, a potem dwukrotnie przyłożyć regułę łańcuchową. Chyba prościej – a na pewno bardziej przejrzyście, bardziej kształcąco i bardziej uczenie – jest zrozumieć jak $D^2g(x)$ [tj. macierz drugich pochodnych cząstkowych funkcji g (która zadają formę dwuliniową)] wyraża się w terminach $D^2f(Ax)$ i A (por. zad. 3.3), a następnie zauważyć, że $\Delta g(x) = \operatorname{tr}(D^2 g(x))$.

3.21 (będzie na RRCz; nie jestem przekonany, że jest bardzo pouczające lub istotne). Wyrazić dwuwymiarowy laplasjan we współrzędnych biegunowych: załóżmy, że funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna, niech $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$, $g(r,\alpha) \coloneqq f(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ (dla $r > 0$). Sprawdzić, że

$$f''_{xx} + f''_{yy} = g''_{rr} + \frac{1}{r}g'_r + \frac{1}{r^2}g''_{\alpha\alpha}.$$

Plan pracy. Można po prostu przyłożyć dwa razy regułą łańcuchową, żeby obliczyć prawą stronę.

3.22 (z zajęć na Wydziale Chemii UW)**.** Niech $f(x,y) = (x^2+y^2-25)(x^2-y-5)$ dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Zachodzą wtedy równości

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x(x^2-y-5) + 2x(x^2+y^2-25),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y(x^2-y-5) - (x^2+y^2-25).$$

a) Znaleźć wszystkie punkty, w których gradient funkcji f jest wektorem zerowym.

b) Znaleźć ekstrema lokalne funkji f.

c) Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji f na zbiorze $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqslant 25,\ x \geqslant 0\}$ [lub uzasadnić, że funkcja którejś z nich lub obu nie przyjmuje].

3.23. Znaleźć wszystkie punkty krytyczne funkcji

$$f(x,y) = 3x^4 - \frac{2}{3}y^3 + 2x^2y - 2x^2 + y^2.$$

Dla każdego z tych punktów rozstrzygnąć, czy funkcja f ma w tym punkcie lokalne ekstremum [a jeśli tak, to czy jest to minimum czy maksimum].

3.24. Znaleźć wszystkie punkty krytyczne funkcji

$$f(x,y) = x^3y - 3x^2y + y^2.$$

Dla każdego z tych punktów rozstrzygnąć, czy funkcja f ma w tym punkcie lokalne ekstremum [a jeśli tak, to czy jest to minimum czy maksimum].

3.25. Wypisać wielomian Taylora $T_2(x,y)$ stopnia 2 dla funkcji $f(x,y) = e^x \sin(y)$ wokół punktu $(x_0,y_0) = (0,0)$. Wykazać, że dla $|x|, |y| \leqslant \delta \leqslant 1/4$ spełnione jest oszacowanie

$$|f(x,y) - T_2(x,y)| < \delta^3.$$

3.26. Funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie $(0,0)$ i spełnia

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - e^{x-y}}{x^2+y^2} = 1.$$

Wyznaczyć $Df(0,0)$ oraz $D^2f(0,0)$.

3.27. Funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie $(0,0)$ i spełnia

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) + \cos(2x+3y) + 2x^2}{x^2+y^2} = 1.$$

a) Uzasadnić, że $(0,0)$ jest punktem krytycznym funkcji f, ale funkcja f nie ma w nim lokalnego ekstremum.

b) Uzasadnić, że funkcja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem $g(y) = f(0,y)$ ma w punkcie $y=0$ lokalne minimum właściwe.

c) Niech $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $h(x) = f(x,0)$. Podać przykłady funkcji f [spełniających założenia zadania], świadczące o tym, że w punkcie $x=0$ funkcja h może mieć zarówno lokalne minimum właściwe, lokalne maksimum właściwe, jak i punkt przegięcia.

3.28. Funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest dana wzorem

$$f(x,y) = \|(x,y)-(1,1)\|_2+\|(x,y)-(-1,1)\|_2+\|(x,y)-(1,-1)\|_2+\|(x,y)-(-1,-1)\|_2.$$

Znaleźć – najlepiej w możliwie prosty sposób i wykonując możliwie najmniej rachunków – wielomian Taylora stopnia 3 funkcji f wokół punktu $(0,0)$; odpowiedź oczywiście uzasadnić. (Może – przy pewnej dozie zawziętości i skupienia – da się przeprowadzić wszystkie konieczne obliczenia w pamięci, bez kartki?).

3.29. W zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ ustalić, czy funkcja

$$f(x,y) = ay(e^x - 1) + x\sin x + 1 - \cos y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

ma w punkcie $(0,0)$ ekstremum lokalne (i jakie) czy też go nie ma.

3.30. Zbiór $A \subset \mathbb{R}^k$ jest wypukły i otwarty. Funkcja $f\colon A \to \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna w zbiorze A i $D^2f(x) \geqslant 0$ dla $x \in A$ [różniczka rzędu II, tj. $D^2f(x)$, wyznacza w każdym punkcie $x \in A$ formę kwadratową półokreśloną nieujemnie]. Udowodnić, że funkcja f jest wypukła.

3.31. Funkcja $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna, zaś $p \in \mathbb{R}^k$ jest punktem krytycznym: $\nabla f(p) = 0$. Udowodnić, że jeśli istnieje otoczenie $U = \operatorname{int} U \subset \mathbb{R}^k$ punktu p, takie że $D^2f(x) \leqslant 0$ dla $x \in U$ [różniczka rzędu II, tj. $D^2f(x)$, wyznacza w każdym punkcie $x \in U$ formę kwadratową półokreśloną niedodatnio], to f ma w punkcie p maksimum lokalne [niekoniecznie właściwe/ścisłe].

4. Teoria lokalna odwzorowań klasy C^1

Materiał do omówienia na zajęciach [3–4 ćw. (?)]

Teoria. Twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym.

- **4.1.** Zbadać lokalną bijektywność odwzorowań $f, g, h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadanych wzorami

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= (x^2 - y^2, 2xy),\\
g(x,y) &= (x^5 + x^3, y + \operatorname{arc\,tg}(y)),\\
h(x,y) &= (e^x \cos(y), e^x \sin(y)).
\end{aligned}
$$

Teoria. Dyfeomorfizm. Przekształcenie odwrotne do dyfeomorfizmu jest dyfeomorfizmem. Złożenie dyfeomorfizmów jest dyfeomorfizmem

- **4.2.** Rozstrzygnąć, które z poniższych [otwartych] podzbiorów płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ są dyfeomorficzne: kwadrat, cała płaszczyzna, pierwsza ćwiartka, górna półpłaszczyzna, płaszczyzna z wyjętą półprostą, płaszczyzna z wyjętą prostą, nakłuta płaszczyzna.

  Podać przykłady dyfeomorfizmów (jeśli istnieją) – wypisać je wprost wzorem lub jako złożenie kilku dyfeomorfizmów wyrażonych wzorem.

- **4.3.** Skonstruować dyfeomorfizm kwadratu na trójkąt.

- **4.4.** Powiemy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}^k$ jest łukiem regularnym, jeśli istnieje istnieje przedział $J \subset \mathbb{R}$ oraz różnowartościowa funkcja $\varphi\colon J \to \mathbb{R}^k$ klasy C^1, taka że $\varphi'(t) \neq 0$ dla każdego $t \in J$ oraz $\varphi(J) = A$.

  a) Zbiory $U, V \subset \mathbb{R}^k$ są otwarte, F jest dyfeomorfizmem U na V, $A \subset U$ jest łukiem regularnym. Wykazać, że $F(A)$ jest łukiem regularnym.

  b) Wskazać dyfeomorfizm zbioru $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > \sqrt{3}|x|\}$ na otwartą górną półpłaszczyznę H. Czy istnieje dyfeomorfizm $F\colon \mathbb{R}^2 \overset{\text{na}}{\to} \mathbb{R}^2$, taki że $F(B) = H$?

  c) Niech $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$. Czy istnieje dyfeomorfizm $F\colon \mathbb{R}^2 \overset{\text{na}}{\to} \mathbb{R}^2$, taki że $F(C) = H$?

- **4.5.** a) Wypisać wzorem dyfeomorfizm $\mathbb{R}^k$ na kulę jednostkową (i odwrotny).

  ą) Wypisać wzorem dyfeomorfizm $\mathbb{R}^k$ na kulę jednostkową w normie ℓ_p (i odwrotny).

  b) Podać przykład dyfeomorfizmu $\mathbb{R}^2$ na półkole.

***

Teoria. Twierdzenie o funkcjach uwikłanych (TFU).[1]

• **4.6.** Wykazać, że układ równań

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^3 + z^4 = 2 \end{cases}$$

wraz z warunkami $y(0) = 1$, $z(0) = -1$ wyznacza w otoczeniu punktu $x = 0$ zmienne y, z jako funkcje klasy C^1 zmiennej x. Obliczyć $y'(0)$, $z'(0)$.

• **4.7.** a) Wykazać, że równanie

$$xe^y + ye^x = 2$$

wyznacza w otoczeniu punktu $x = 0$ zmienną y jako funkcję klasy C^1 zmiennej x. Obliczyć $y'(0)$.

b) Czy funkcja $y = y(x)$ jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie $x = 0$?

• **4.8.** a) Wykazać, że istnieje $\varepsilon > 0$ i funkcje $u, v\colon (-\varepsilon, \varepsilon)^2 \to \mathbb{R}^2$, klasy C^1, takie że dla wszystkich $(x, y) \in (-\varepsilon, \varepsilon)^2$ zachodzi

$$\begin{cases} (1 + y)e^{u(x,y)} + (1 + x)e^{v(x,y)} = 2, \\ 2u(x, y)e^y + v(x, y)e^x = 0. \end{cases}$$

ą) Czy może się zdarzyć, że znalezione funkcje u, v są określone nie tylko w otoczeniu punktu $(0, 0)$, ale wręcz na całym $\mathbb{R}^2$ [i są klasy C^1, i spełniają powyższy układ równań]?

b) Czy istnieje $\varepsilon > 0$, taki że funkcje u, v klasy C^1 spełniający powyższy układ równań są wyznaczone jednoznacznie?

◦ **4.9.** Wykazać twierdzenie o funkcji odwrotnej bezpośrednio z twierdzenia o funkcji uwikłanej.

Zadania treningowe, uzupełniające, dodatkowe

4.10. Odzworowanie $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest dane wzorami $F(x, y) = (u, v)$, $u = x(x^2 - 3y^2)$, $v = y(y^2 - 3x^2)$. Wyznaczyć wszystkie takie punkty $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, że F odwzorowuje bijektywnie pewne otoczenie punktu (x_0, y_0) na otoczenie punktu $(u_0, v_0) = F(x_0, y_0)$.

Jednym z takich punktów jest $(1, 2)$, zatem w pewnym otoczeniu punktu $(-11, 2)$ jest określone odzworowanie odwrotne $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, przekształcające otoczenie punktu $(-11, 2)$ na otoczenie punktu $(1, 2)$. Uzasadnić, że jest ono klasy C^1 i obliczyć $\frac{\partial y}{\partial u}(-11, 2)$.

4.11. Odwzorowanie $F\colon (-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ jest dane wzorem

$$F(s, t) = (F_1(s, t), F_2(s, t)) = (s + t \sin s, \ln(\cos s) + t \cos s).$$

[1] Po angielsku: implicit function theorem (IFT).

a) Sprawdzić, że jeśli $s_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$ oraz $t_0 \in \mathbb{R}$ spełniają $t_0 \cos s_0 \neq -1$, to $DF(s_0, t_0)$ jest izomorfizmem liniowym.

b) Uzasadnić, że w pewnym otoczeniu V punktu $(x_0, y_0) = (0, 0)$ jest określone odwzorowanie $G = (G_1, G_2)$, klasy C^1, będące lokalnym odwrotnym do F. Uzasadnić również – najlepiej w możliwie prosty sposób, bez wypisywania *explicite* $DG(x, y)$ – że dla każdego punktu $(x, y) \in V$ wektory $\nabla G_1(x, y)$ oraz $\nabla G_2(x, y)$ są prostopadłe.

c) Rozstrzygnąć, czy w pewnym otoczeniu punktu $(0, -1)$ funkcja F jest różnowartościowa.

4.12. Zbiór $U \subset \mathbb{R}^k$ jest otwarty, funkcja $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ jest różniczkowalna w sposób ciągły. Załóżmy, że istnieje stała $\lambda > 0$, taka że dla każdych $x, y, \in U$ zachodzi

$$\|f(x) - f(y)\|_2 \geqslant \lambda \|x - y\|_2.$$

Wykazać, że dla każdego $x \in U$ różniczka $Df(x)$ jest izomorfizmem liniowym. Wywnioskować, że f jest dyfeomorfizem U na $f(U)$.

○ **4.13** (kształcące)**.** Funkcja $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ jest klasy C^1. Dla każdego $x \in \mathbb{R}^k$ zachodzi $\|Df(x)\|_{2\to 2} \leqslant 1/2$ (tzn. różniczka $Df(x)$ jest przekształceniem liniowym o normie [operatorowej] $\leqslant 1/2$). Wykazać, że funkcja dana wzorem $g(x) = x + f(x)$ jest dyfeomorfizmem $\mathbb{R}^k$ *na* $\mathbb{R}^k$.

Wskazówka. Postępować podobnie jak w dowodzie ważnego twierdzenia z wykładu (w szczególności to zadanie jest dlatego kształcące, że zmusza do prześledzenia tego dowodu).

4.14. Zbiór $U \subset \mathbb{R}^k$ jest otwarty, funkcja $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ jest różniczkowalna w sposób ciągły. Zbiór $A \subset U$ jest zwarty, funkcja f jest różnowartościowa na A i dla każdego $a \in A$ różniczka $Df(a)$ jest izomorfizmem liniowym. Wykazać, że istnieje zbiór otwarty V, $A \subset V \subset U$, taki że f jest różnowartościowa na V, zbiór $f(V)$ jest otwarty, zaś funkcja odwrotna $(f_{|V})^{-1}\colon f(V) \to V$ jest różniczkowalna w sposób ciągły.

4.15. Niech $F(x, y) = (e^{x+y} + e^{x-y}, e^{x+y} - e^{x-y})$ dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Znaleźć $F(\mathbb{R}^2)$ i ustalić, czy F jest dyfeomorfizmem (na swój obraz).

○ **4.16.** Rozważmy następujące [otwarte, niejednospójne] podzbiory płaszczyzny:

$$\begin{aligned}
A_{0,\infty} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < \|x\|_2\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} && \text{(nakłuta płaszczyzna)},\\
A_{0,1} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < \|x\|_2 < 1\} && \text{(nakłuta kula)},\\
A_{1,\infty} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < \|x\|_2\} && \text{(zewnętrze dysku)},\\
A_{1,3} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < \|x\|_2 < 3\} && \text{(pierścień)},\\
B &= \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 < 1\} \setminus ([-1/2, 1/2] \times \{0\}) && \text{(kula bez odcinka)},\\
C &= \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 < 1\} \setminus ([0, 1/2] \times \{0\}) && \text{(kula bez innego odcinka)}.
\end{aligned}$$

Podać przykłady dyfeomorfizmów tych zbiorów (wypisać wprost wzorem lub jako złożenie kilku dyfeomorfizmów, z których każdym jest wyrażony wzorem).

Sugestia. W przypadku zbiorów B, C nie brnąć w straszne rachunki (poskładać różne proste dyfeomorfizmy). Być może (?) pomocne będzie wypisanie dla każdej pary zbiorów $A_{0,\infty}$, $A_{0,1}$, $A_{1,\infty}$, $A_{1,3}$ bezpośredniego dyfeomorfizmu (bez przechodzenia przez inne zbiory).

4.17. Podać przykład dyfeomorfizmu odwzorowującego płaszczyznę $\mathbb{R}^2$ na zbiór

$$\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : u\geqslant 0, v>0\}\cup\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : u<0, v>-1\}.$$

(Wypisać wprost wzorem lub jako złożenie kilku dyfeomorfizmów, z których każdy jest wyrażony wzorem).

4.18. Podać przykład dyfeomorfizmu odwzorowującego płaszczyznę $\mathbb{R}^2$ na zbiór

$$\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : u>v>0,\ uv<1\}.$$

(Wypisać wprost wzorem lub jako złożenie kilku dyfeomorfizmów, z których każdy jest wyrażony wzorem).

4.19. Podać przykład dyfeomorfizmu odwzorowującego płaszczyznę $\mathbb{R}^2$ na zbiór

$$\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : u>v^2>0,\ u+v<6\}.$$

(Wypisać wprost wzorem lub jako złożenie kilku dyfeomorfizmów, z których każdy jest wyrażony wzorem).

4.20. W $\mathbb{R}^4$ rozważamy zbiory otwarte

$$U=\{(u,v,s,t)\in\mathbb{R}^4 : u^2+v^2>0,\ t>0\},$$
$$X=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : x^2+y^2>0,\ w>0\}$$

(różne nazwy współrzędnych dla wygody) oraz odwzorowanie $F\colon U\to X$ zadane przez

$$F(u,v,s,t)=(x,y,z,w),\qquad \begin{cases} x=tu,\\ y=tv,\\ z=s,\\ w=u^2+v^2.\end{cases}$$

Wykazać, że F jest dyfeomorfizmem U *na* X (sugestia: wyznaczyć wzorem F^{-1}). Niech

$$T=\{(x,y,z,w)\in X : x^2+y^2+z^2+3=4\sqrt{x^2+y^2},\ w=1\}.$$

Wyznaczyć $F^{-1}(T)$ (opisać za pomocą prostych równań w zmiennych u, v, s, t).

○ **4.21** (TFU – łagodny przykładzik)**.** Rozważamy równanie

$$F(x,y):=x^3+y^3-3xy=0.$$

a) Z pomocą komputera sprawdzić, jak wygląda zbiór opisany tym równaniem (można np. wpisać w Wolframa `plot x^3 + y^3 - 3xy = 0`).

b) Uzasadnić – formalnie, za pomocą jakichś rachunków – że w otoczeniu punktu $(0, 0)$ nasze równanie nie wyznacza jednoznacznie zmiennej y jako funkcji zmiennej x.

c) Czy w otoczeniu punktu $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$ nasze równanie wyznacza jednoznacznie zmienną y jako funkcję zmiennej x? Plan pracy: sprawdzić, co daje TFU, porównać z obrazkiem z pierwszego podpunktu (może warto coś dorysować) i zrozumieć, co się nam nim dzieje, a na koniec uzasadnić ściśle ostateczną odpowiedź.

d) Załóżmy, że mamy punkt (x_0, y_0) spełniający $F(x_0, y_0) = 0$, w którego pewnym otoczeniu nasze równanie wyznacza jednoznacznie y jako funkcję zmiennej x:

$$x^3 + y(x)^3 - 3xy(x) = 0 \qquad \text{(lokalnie, w pewnym otoczeniu } (x_0, y_0)).$$

Znaleźć punkty krytyczne funkcji $y = y(x)$. Plan pracy: można zacząć od zrozumienia, co się dzieje na rysunku, albo można najpierw zróżniczkować powyższą równość po x, rozwiązać otrzymane równanie (pamiętając, że mamy także równanie $F(x, y(x)) = 0$), a następnie otrzymany wynik skonfrontować z rysunkiem (znowu, może warto coś dorysować) i wtedy zrozumieć, co się na nim dzieje.

e) Czy w znalezionym punkcie krytycznym funkcja $y = y(x)$ ma ekstremum lokalne? Odczytać odpowiedź z rysunku oraz uzasadnić ją formalnie, za pomocą jakichś rachunków.

f) Co by się zmieniło, gdybyśmy rozpatrywali równanie

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \qquad (a > 0 \text{ to ustalona liczba})\,?$$

○ **4.22** (dydaktyczne)**.** Niech $P(x, y) = x^3y^2 + 3x^2y^3 - xy - 2x - y^2 + 1$ dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Wykazać, że istnieją funkcje rzeczywiste g, h klasy C^1, określone na pewnym przedziale otwartym $J \subset \mathbb{R}$ zawierającym 0, takie że $P(x, g(x)) = 0 = P(x, h(x))$ oraz $g(x) < h(x)$ dla każdego $x \in J$. Znaleźć $g'(0)$, $h'(0)$.

b) Wykazać, że istnieje pewien przedział otwarty $I \subset \mathbb{R}$ zawierający 0, taki że istnieje dokładnie jedna funkcja $f\colon I \to \mathbb{R}$ klasy C^1, taka że $P(f(y), y) = 0$.

Uwagowskazówka do obu podpunktów. Zadanie jest proste, jak się zrozumie, co trzeba mieć, żeby zacząć odpalać TFU.

4.23. Wykazać, że w otoczeniu punktu $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, -1)$ równanie $xy = 2 + z\ln(y)$ wyznacza y jako funkcję klasy C^1 pozostałych zmiennych: $y = y(x, z)$. Obliczyć pochodne cząstkowe tej funkcji w punkcie $(x_0, z_0) = (2, -1)$. Obliczyć także $\varphi'(0)$, gdzie $\varphi(t) = y(2e^{3t}, -e^t)$ (dla t w pewnym otoczeniu zera).

4.24. Wykazać, że układ równań

$$\begin{cases} 3x^2y + t^2x - ty^2 = 3 \\ tx^2 + xy^2 - 2t^2y = 0 \end{cases}$$

wyznacza w otoczeniu punktu $(t_0, x_0, y_0) = (1, 1, 1)$ zmienne x, y jednoznacznie jako funkcje klasy C^1 zmiennej t: $x = x(t)$, $y = (t)$. Obliczyć $x'(1)$, $y'(1)$.

W ramach autosprawdzenia. Pochodne cząstkowe spełniają $|x'(1)| + |y'(1)| \leqslant 9$.

4.25. Wykazać, że układ równań

$$\begin{cases} e^u + v - xy = 0 \\ 2u + e^v + x - 2y = 0 \end{cases}$$

wraz z warunkami $u(1,1) = 0$, $v(1,1) = 0$ wyznacza w otoczeniu punktu $(x_0, y_0) = (1,1)$ zmienne u, v jako funkcje klasy C^1 zmiennych x, y. Znaleźć pochodne cząstkowe $u'_x(1,1)$, $u'_y(1,1)$, $v'_x(1,1)$, $v'_y(1,1)$.

W ramach autosprawdzenia. Pochodne cząstkowe spełniają $|u'_x(1,1)| + |u'_y(1,1)| + |v'_x(1,1)| + |v'_y(1,1)| \leqslant 6$.

4.26. Rozważamy wielomian $x \mapsto x^5 + e^s x + \ln(s)$, gdzie $s > 0$ jest parametrem. Wykazać, że [dla każdego $s > 0$] wielomian ten ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty $x_0 = x_0(s)$. Wykazać, że x_0 jest funkcją klasy C^1 parametru $s \in (0, \infty)$ i obliczyć $x_0'(1)$.

4.27. Załóżmy, że $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^2, zaś punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ spełnia:

$$F(x_0, y_0) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Wtedy w pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0) równanie $F(x, y) = 0$ wyznacza funkcję uwikłaną $y = y(x)$. Wykazać, że [przy powyższych założeniach] $x = x_0$ jest punktem krytycznym funkcji uwikłanej. Wykazać również, że jeśli

$$\frac{-\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)} \neq 0,$$

to funkcja uwikłana $y = y(x)$ ma w punkcie w $x = x_0$ ekstremum lokalne [właściwe]. Jak odczytać, czy jest to minimum lokalne czy maksimum lokalne?

5. Rozmaitości

Uwaga. Ten rozdział jest ściśle związany z twierdzeniem o funkcjach uwikłanych.

Komentarz (motywacja). Definicja rozmaitości będzie nam potrzebna m.in. do dwóch ważnych zastosowań. Po pierwsze, chcielibyśmy wiedzieć, jak szukać ekstremów funkcji k zmiennych, które nie są określone na otwartym podzbiorze $\mathbb{R}^k$, tylko np. na jakiejś „mniejwymiarowej" „powierzchni", bo zmienne $x_1, \dots, x_k$ są związane jakimiś dodatkowymi warunkami.

Po drugie, chcielibyśmy umieć określić, czym jest i jak znajdować np. pole powierzchni obiektów takich jak np. sfera czy torus, które są podzbiorami $\mathbb{R}^k$. [Ich k-wymiarowa miara Lebesgue'a jest równa zero.]

Materiał do omówienia na zajęciach [3+ ćw. (??)]

Teoria. Równoważne definicje rozmaitości (parametryzacja, wykres, równanie).

Teoria. Przestrzeń styczna do rozmatości.

• **5.1.** Niech

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 = 16(x^2 + y^2)\}.$$

a) Wykazać, że M jest dwuwymiarową rozmaitością.
b) Wyjaśnić [słownie/geometrycznie], jakim zbiorem jest M.
c) Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej do M w punkcie $p = (3\sqrt{2}/4, 3\sqrt{2}/4, \sqrt{3}/2)$.
d) Podać przykład układu parametryzacji M.

• **5.2.** Każdy punkt gałęzi hiperboli $xy = 1$, $x > 0$, $y > 0$, $z = 0$ łączymy odcinkiem z punktem $(0, 0, 1)$. Niech M będzie sumą tych odcinków (bez końców). Wykazać, że M jest rozmaitością i znaleźć jej parametryzację.

◦ **5.3.** Rozstrzygnąć, czy następujące zbiory są dwuwymiarowymi rozmaitościami w $\mathbb{R}^3$:

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^6 + y^4 + z^3 = 0\},$$
$$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^6 + y^5 + z^4 = 0\}.$$

◦ **5.4.** Załóżmy, że $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Niech

$$O(n) = \{A \in M_{n\times n} : A^T A = I\}$$

będzie zbiorem macierzy ortogonalnych [rozmiaru $n \times n$, o współczynnikach rzeczywistych]. Wykazać, że $O(n)$ jest rozmaitością wymiaru $n(n-1)/2$. Opisać przestrzeń styczną i afiniczną przestrzeń styczną do $O(n)$ w punkcie I.

***

Teoria. Ekstrema warunkowe – warunek konieczny (mnożniki Lagrange'a).

• **5.5.** Znaleźć kresy funkcji $f(x, y, z) = xy - z$ na zbiorze

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1,\ x + y + z \geqslant 0\}.$$

• **5.6.** Znaleźć maksimum funkcji

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_5 + x_4x_5x_1 + x_5x_1x_2$$

na zbiorze

$$A = \{x \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1,\ x_i \geqslant 0 \text{ dla } i = 1, \dots 5\}.$$

***

Teoria. Twierdzenie o rzędzie.

Zadania treningowe, uzupełniające, dodatkowe

○ **5.7** (wokół definicji rozmaitości)**.** *Założenia.* Dane są liczby naturalne $k > m \geqslant 1$ oraz niepusty zbiór $M \subset \mathbb{R}^k$. W zbiorze M rozpatrujemy naturalną topologię indukowaną z $\mathbb{R}^k$: zbiory otwarte w M to dokładnie zbiory postaci $M \cap U$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^k$ jest otwarty.

Motywacja. Na wykładzie pojawiły się różne równoważne definicje rozmaitości: ten tekst ma pomóc w przetrawieniu ichi zrozumieniu, co to znaczy, że M jest m-wymiarową rozmaitością [zanurzoną w $\mathbb{R}^k$]. Sytuacja, którą warto mieć w pamięci: $k = 3$, $m = 2$; $M = \mathbb{S}^2$ (sfera w $\mathbb{R}^3$).

Definicja, wersja 0. Zbiór M jest m-wymiarową rozmaitością [zanurzoną w $\mathbb{R}^k$], jeśli lokalnie istnieje parametryzacja: dla każdego punktu $p \in M$ istnieje zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^k$, taki że $p \in U$, zbiór otwarty $G \subset \mathbb{R}^m$, oraz homeomorfizm $\varphi \colon G \overset{\text{„na”}}{\to} M \cap U$, który jest klasy C^1, taki że dla każdego $x \in G$ różniczka $D\varphi(x) \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ jest przekształceniem różnowartościowym (ma rząd równy m (maksymalny możliwy)).

- Przekształcenie φ nazywamy parametryzacją, zaś φ^{-1} – mapą.
- Zbiór U jest otoczeniem punktu p (w $\mathbb{R}^k$), zbiór $M \cap U$ jest otoczeniem punktu p w M.
- Przekształcenie $\varphi \colon G \to M \cap U$ ma za dziedzinę otwarty podzbiór $\mathbb{R}^m$ i jest klasy C^1. Przekształcenie $\varphi^{-1} \colon M \cap U \to G$ jest ciągłe, ale nic nie mówimy o jego różniczkowalności – dziedziną jest zbiór $M \cap U \subset M \subset \mathbb{R}^k$, który nie musi być otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^k$ [a nawet: nie jest, bo $m < k$], choć jest otwartym podzbiorem M.
- Różniczka $D\varphi(x) \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ jest zadana przez macierz „pionową”, rozmiaru $k \times m$, więc nie może być izomorfizmem liniowym [bo $m < k$], ale chcemy, żeby była przekształceniem różnowartościowym.

- Intuicja: do opisania M potrzebnych jest [dokładnie] m parametrów (nie muszą być one bardzo ściśle związane ze zmiennymi w naszej wyjściowej przestrzeni $\mathbb{R}^k$).

Definicja, wersja 1. Zbiór M jest m-wymiarową rozmaitością [zanurzoną w $\mathbb{R}^k$], jeśli lokalnie M jest wykresem: dla każdego punktu $p = (p_1, \dots, p_k) \in M$ istnieje zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^k$, taki że $p \in U$ oraz zbiór $M \cap U$ jest wykresem funkcji m zmiennych, tzn. istnieje m [parami różnych] numerów $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, k\}$ oraz $k-m$ [parami różnych] numerów $j_1, \dots, j_{k-m} \in \{1, \dots, k\}$, takich że $\{i_1, \dots, i_m\} \cup \{j_1, \dots, j_{k-m}\} = \{1, \dots, k\}$, a także istnieje zbiór otwarty $G \subset \mathbb{R}^m$ będący otoczeniem punktu $(p_{i_1}, \dots, p_{i_m}) \in \mathbb{R}^m$ oraz funkcja $f = (f_{j_1}, \dots, f_{j_{k-m}}) \colon G \to \mathbb{R}^{k-m}$, klasy C^1, taka że $x \in M \cap U$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_{j_s} = f_{j_s}(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})$ dla $s \in \{1, \dots, k-m\}$.

- Sytuacja jest notacyjnie najbardziej przejrzysta, jeśli $\{i_1, \dots, i_m\} = \{1, \dots, m\}$, zaś $\{j_1, \dots, j_{k-m}\} = \{m+1, \dots, k\}$ – wówczas $M \cap U = \{(x, f(x)) : x \in G\}$, tzn. $M \cap U$ jest wykresem funkcji $f \colon G \to \mathbb{R}^{k-m}$, funkcja f zależy od m zmiennych.
- Intuicja: do opisania M potrzebnych jest m zmiennych – jest to pewnych m współrzędnych naszej wyjściowej przestrzeni $\mathbb{R}^k$ (pozostałe $k-m$ zmiennych jest ich funkcją).

Definicja, wersja 2. Zbiór M jest m-wymiarową rozmaitością [zanurzoną w $\mathbb{R}^k$], jeśli lokalnie jest zadany równaniem: dla każdego punktu $p \in M$ istnieje zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^k$, taki że $p \in U$ oraz funkcja $F \colon U \to \mathbb{R}^{k-m}$, klasy C^1, taka że dla każdego $x \in M \cap U$ różniczka $DF(x) \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k-m}$ jest przekształceniem „na" (tj. ma rząd równy $k-m$ (maksymalny możliwy)), oraz

$$M \cap U = F^{-1}(0) = \{x \in U : F(x) = 0\}.$$

- Różniczka $DF(x) \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k-m}$ jest zadana przez macierz „poziomą", rozmiaru $(k-m) \times k$, więc nie może być izomorfizmem liniowym [bo $m \geqslant 1$], ale chcemy, żeby była przekształceniem „na".
- Intuicja: w naszej wyjściowej przestrzeni $\mathbb{R}^k$ mamy co prawda k współrzędnych, ale M jest opisane przez $k-m$ równań; każde równanie zabiera jeden „stopień swobody", więc zostaje nam faktycznie tylko m stopni swobody.

○ a) Spokojnie przemyśleć teorię z wykładu i krytycznie przeczytać odpowiednie fragmenty skryptu lub powyższy tekst. W szczególności zrozumieć:
- że jeśli założymy warunek z definicji numer 1, to warunki z definicji numer 0 i 2 dostajemy praktycznie za darmo;
- że warunek z definicji numer 2 implikuje warunek z defnicji numer 1 na mocy TFU;
- co się dzieje, jeśli $k = 3$, $m = 2$, $M = \mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$ jest sferą, $p = (0, 0, 1) \in M$;
- co by się zmieniło, gdybyśmy zamiast zamiast bieguna północnego $p \in \mathbb{S}^2$ wzięli biegun „wschodni" (?) $\tilde{p} = (1, 0, 0) \in \mathbb{S}^2$.

b) Wykazać, sprawdzić, zrozumieć, przypomnieć sobie lub uświadomić sobie, że:
- jeśli mamy punkt $p \in M$, [lokalną] parametryzację $\varphi \colon G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ z definicji numer 0 oraz punkt $x \in G$, taki że $\varphi(x) = p$, a także standardową bazę $e_1, \dots, e_m$ przestrzeni $\mathbb{R}^m$, to wektory $D\varphi(x)e_1, \dots, D\varphi(x)e_m \in \mathbb{R}^k$ są kolumnami macierzy

$D\varphi(x)$, są liniowo niezależne oraz są bazą T_pM, tj. przestrzeni stycznej do M w punkcie p, która jest m-wymiarową podprzestrzenią liniową $\mathbb{R}^k$;

– jeśli mamy punkt $p \in M$, [lokalne] równanie $F = (F_1, \ldots, F_{k-m})\colon U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k-m}$ z definicji numer 2, to wiersze $DF(p)$, tzn. wektory $\nabla F_1(p), \ldots, \nabla F_{k-m}(p) \in \mathbb{R}^k$, są liniowo niezależne i są bazą $(T_pM)^\perp$, tj. przestrzeni prostopadłej [do przestrzeni stycznej] do M w punkcie p, która jest $(k-m)$-wymiarową podprzestrzenią liniową $\mathbb{R}^k$;

– jeśli mamy $p \in M$, [lokalną] parametryzację $\varphi\colon G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ z definicji numer 0 oraz [lokalne] równanie $F = (F_1, \ldots, F_{k-m})\colon U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k-m}$ z definicji numer 2, to $F \circ \varphi(x) \equiv 0$, więc

$$DF(\varphi(x))D\varphi(x) = 0 \qquad \text{[czy jest to zero po prawej stronie?]},$$

co oznacza dokładnie, że wiersze $DF(\varphi(x))$ są prostopadłe do kolumn $D\varphi(x)$.

5.8. Punkt P porusza się ruchem jednostajnym wzdłuż odcinka od punktu $O = (0, 0, 0)$ do punkt $A = (1, 0, 0)$. W tym samym czasie punkt Q porusza się, też jednostajnie, od punktu $B = (0, 1, 0)$ do punktu $C = (0, 1, 1)$. Niech M będzie sumą wszystkich odcinków PQ (bez końców), łączących punkty P i Q w jednoczesnych położeniach. Podać przykład parametryzacji uzasadniającej, że M jest dwuwymiarową rozmaitością w $\mathbb{R}^3$. [Oczywiście sprawdzić wymagane warunki].

○ **5.9** (wstęga Möbiusa i prace ręczne, patrz też zadanie 5.18)**.** *Uwaga.* Podpunkty wymagające użycia kleju, kredek i nożyczek są silnie zalecane dla wszystkich, którzy nigdy ich samodzielnie nie wykonywali.

a) Wycinamy pasek papieru. Gdybyśmy skleili jego krótsze boki, to otrzymalibyśmy powierzchnię boczną [skończonego] walca. Przed sklejeniem krótszych boków, obracamy jednak jeden koniec o 180° (patrz Rysunek 5.1). Otrzymana powierzchnia nazywa się wstęgą Möbiusa.

b) Wykazać, że wstęga Möbiusa jest dwuwymiarową rozmaitością w $\mathbb{R}^3$, wypisując jej parametryzację. [Chodzi tu o wstęgę Möbiusa bez brzegu – intuicyjnie rozumianego jednowymiarowego brzegu, co odpowiada brzegowi względem naturalnej topologii indukowanej z $\mathbb{R}^3$.]

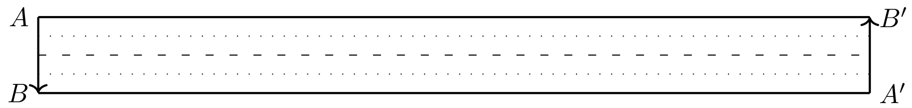
Wskazówka. Chyba najprościej jest myśleć, że obracamy odcinek w płaszczyźnie xz i jednocześnie obracamy [w odpowiednim tempie] tę płaszczyznę w $\mathbb{R}^3$ względem osi z. [Powierzchnia zakreślana przez śmigło samolotu lecącego po okręgu].

c) Przekonać się, że otrzymana powierzchnia ma tylko jedną „stronę”, np. kolorując ją kredką bez odrywania kredki od papieru.

d) Co się stanie, jeśli weźmiemy nożyczki i przetniemy sklejoną wstęgę Möbiusa wzdłuż przerywanej linii zaznaczonej na Rysunku 5.1? Dlaczego tak się dzieje? Opisać uważnie i starannie, co dokładnie otrzymamy.

Wskazówka. Kropkowane linie na Rysunku 5.1.

e) Bierzemy nowy pasek papieru i ponownie sklejamy jego krótsze boki, ale tym razem przed sklejeniem dokonujemy skręcenia o 360°. Co się stanie, jeśli weźmiemy nożyczki i przetniemy tak otrzymaną wstęgę przez środek, wzdłuż przerywanej linii? Dlaczego tak się dzieje?



Rysunek 5.1.: Zadanie 5.9 – sklejamy krótsze boki wyciętego paska papieru, ale przed sklejeniem skręcamy pasek (pół obrotu), tak żeby pokryły się zaznaczone strzałki, punkty A i A', a także punkty B i B'. [Zaznaczone przerywane linie mają charakter pomocniczy i będą potrzebne dopiero w dalszych podpunktach.]

5.10. Załóżmy, że $M \subset \mathbb{R}^k$ jest rozmaitością wymiaru m, zaś $N \subset \mathbb{R}^l$ jest rozmaitością wymiaru n. Wykazać, że $M \times N \subset \mathbb{R}^{k+l}$ jest rozmaitością wymiaru $m+n$. Jak przestrzeń styczna do rozmaitości $M \times N$ w punkcie (x, y) wyraża się w terminach przestrzeni stycznych T_xM oraz T_yN?

5.11. Dla jakich wartości parametru $c \in \mathbb{R}$ zbiór

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exp(x^2 + 2y^2) = c\}$$

jest jednowymiarową rozmaitością?

○ **5.12.** Każdy z następujących podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jest opisany jednym równaniem:

$$\begin{aligned}
A &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 = 0\},\\
B &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\},\\
C &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z\},\\
D &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\},\\
E &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\},\\
F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\},\\
G &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2 + z^2 - 1)^2 + x^2 = 0\},\\
H &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2 - 1)^2 + (y^2 + z^2 - 1)^2 = 0\},\\
I &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2 - 1)^4 + (y^2 + z^2 - 1)^4 + (z^2 + x^2 - 1)^4 = 0\}.
\end{aligned}$$

Ustalić, które z tych zbiorów są dwuwymiarowymi rozmaitościami, które są jednowymiarowymi rozmaitościami, a które rozmaitościami nie są. Opisać każdy z tych zbiorów za pomocą odpowiedniego słowa [lub słów].

5.13. Niech

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 - xyz = 0,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}.$$

Uzasadnić, że jest to rozmaitość. Wypisać równanie płaszczyzny stycznej do M w punkcie $(1/4, \sqrt{3}/4, \sqrt{3}/8)$. Podać przykładową parametryzację (lub układ parametryzacji) M.

5.14. Niech

$$\begin{aligned} M &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+3z^3 = xy+6z^{1/3},\ z\neq 0\},\\ N &= M\cup\{(0,0,0)\}. \end{aligned}$$

Czy zbiór M jest rozmaitością? Czy zbiór N jest rozmaitością?

5.15. Dana jest liczba $a>0$ i funkcja $f\colon[0,a)\to\mathbb{R}$, która jest ciągła na $[0,a)$ i różniczkowalna w sposób ciągły na $(0,a)$. Niech M będzie powierzchnią obrotową, otrzymaną w wyniku obrotu wykresu funkcji f wokół osi wartości funkcji [o kąt 2π, w $\mathbb{R}^3$]. Znaleźć [rozsądnie sformułowany] warunek konieczny i dostateczny na to, by M było dwuwymiarową rozmaitością w $\mathbb{R}^3$.

5.16. a) Załóżmy, że $M,N\subset\mathbb{R}^k$ są rozmaitościami wymiarów m, n (odpowiednio), przy czym $m+n>k$, $M\cap N\neq\emptyset$ oraz dla każdego $x\in M\cap N$ zachodzi

$$T_xM+T_xN \coloneqq \{v+w : v\in T_xM,\ w\in T_xN\}=\mathbb{R}^k.$$

Wykazać, że $M\cap N$ jest rozmaitością wymiaru $m+n-k$.

b) Podać przykład takich dwuwymiarowych rozmaitości $M,N\subset\mathbb{R}^3$, że $M\cap N\subset\mathbb{R}^3$ jest jednowymiarową rozmaitością, choć istnieją takie punkty $x\in M\cap N$, że $T_xM+T_xN\subsetneq\mathbb{R}^3$.

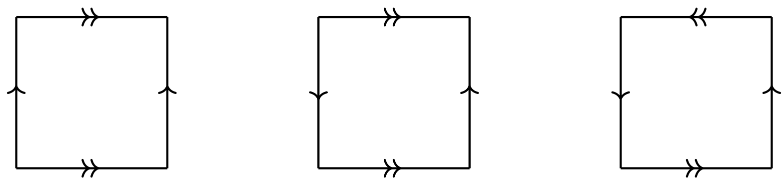
5.17. Dana jest funkcja $F\colon\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ oraz punkt $p\in\mathbb{R}^k$, taki że $F(p)=0$ oraz $\frac{\partial F}{\partial x_i}(p)\neq 0$ dla $i\in\{1,\dots,k\}$. Oznaczmy $M=\{x\in\mathbb{R}^k : F(x)=0\}$. Bezpośrednio z tych założeń i twierdzenia o funkcja uwikłanych wynika, że w pewnym otoczeniu [w M] punktu p *każda* ze zmiennych x_j jest funkcją klasy C^1 pozostałych $k-1$ zmiennych x_j, $j\neq i$, tzn. istnieje zbiór otwarty $U\subset\mathbb{R}^k$, $p\in U$, a także zbiory otwarte $U_i\subset\mathbb{R}^{k-1}$ oraz funkcje $\varphi : U_i\to\mathbb{R}^{n-1}$ klasy C^1, $i\in\{1,\dots,k\}$, takie że

$$\begin{aligned} M\cap U &= \{x\in\mathbb{R}^k:\quad x_1=\varphi_1(x_2,x_3,x_4,\dots,x_k),\ (x_2,x_3,x_4\dots,x_k)\in U_1\}\\ &= \{x\in\mathbb{R}^k:\quad x_2=\varphi_2(x_1,x_3,x_4,\dots,x_k),\ (x_1,x_3,x_4,\dots,x_k)\in U_2\}\\ &= \{x\in\mathbb{R}^k:\quad x_3=\varphi_3(x_1,x_2,x_4,\dots,x_k),\ (x_1,x_2,x_4,\dots,x_k)\in U_3\}\\ &\ \vdots\\ &= \{x\in\mathbb{R}^k:\quad x_k=\varphi_k(x_1,x_2,x_3\dots,x_{k-1}),\ (x_1,x_2,x_3\dots,x_{k-1})\in U_k\}. \end{aligned}$$

Oznaczmy $y_1=(x_2,\dots,x_k)$, $y_i=(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_k)$ dla $i\in\{2,\dots,k-1\}$, $y_k=(x_1,\dots,x_{k-1})$. Sprawdzić, że

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}(y_1)\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3}(y_2)\dots\frac{\partial\varphi_{k-1}}{\partial x_k}(y_{k-1})\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1}(y_1)=(-1)^k.$$

∘ **5.18** (płaszczyzna rzutowa, butelka Kleina i przyjaciele)**.** *Uwaga.* Fragmenty tego zadania mogą być nieco trudniejsze – warto zacząć, od zrozumienia poprzedniego zadania 5.9.



Rysunek 5.2.: Zadanie 5.18 – sklejamy (?) przeciwległe boki kartki papieru, zgodnie z zaznaczonymi strzałkami.

a) Bierzemy kartkę papieru [niegniotliwego i rozciągliwego]. Na Rysunku 5.2 przedstawiono pewne sposoby sklejenia przeciwległych boków kartki. Który sposób sklejania doprowadzi do powstania torusa?

b) Uświadomić sobie, że dwa pozostałe sposoby sklejenia są – nawet przy rozciągliwym papierze – trudne do fizycznego przeprowadzenia w $\mathbb{R}^3$.

c) Doczytać, czym jest płaszczyzna rzutowa i butelka Kleina, np. w pliku „Rozmaitości – przykłady” dostępnym na `https://www.mimuw.edu.pl/~krych/matematyka/AM2skrypt/` [dostęp: 10.01.2025]. W szczególności zrozumieć:

- jak można zdefiniować te obiekty jako pewne podzbiory $\mathbb{R}^4$;
- że są one dwuwymiarowymi rozmaitościami zanurzonymi w $\mathbb{R}^4$;
- który ze sposobów sklejania przedstawionych na Rysunku 5.2 odpowiadałby płaszczyźnie rzutowej, a który – butelce Kleina;
- że płaszczyzna rzutowa zawiera wstęgę Möbiusa;
- że wstęgi Möbiusa można użyć do zaklejania pewnych dziur;
- że butelka Kleina „z pewnych przyczyn nie nadaje się do noszenia piwa ani nawet mleka”.

5.19. Załóżmy, że $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Wykazać, że

$$SL(n) = \{A \in M_{n\times n} : \det(A) = 1\}$$

jest rozmaitością wymiaru $n^2 - 1$ oraz

$$T_I SL(n) = \{A \in M_{n\times n} : \mathrm{tr}(A) = 0\},$$

[Rozpatrujemy macierze rozmiaru $n \times n$, o współczynnikach rzeczywistych, I to macierz identyczności].

5.20 (łatwiutkie)**.** Udowodnić nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną korzystając z mnożników Lagrange'a: znaleźć maksimum funkcji

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n$$

na zbiorze

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1,\ x_i \geqslant 0 \text{ dla } i = 1, \dots n\}.$$

5.21. Wykazać, że jeśli liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \dots, x_k$ spełniają $x_1+x_2+\dots+x_k = a$, to

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} x_i x_j \leqslant \frac{1}{2}\big(1-\frac{1}{k}\big)a^2.$$

5.22. Dane są $a, b \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, które są liniowo niezależne. Oznaczmy $f(x) = \|x\|^2$ dla $x \in \mathbb{R}^k$.

a) Znaleźć minimum funkcji $f(x)$ przy warunku $\langle x, a\rangle = 1$. Niezależnie od metody rozwiązania zrozumieć [elementarnie/geometrycznie/GALowo], dlaczego minimum jest osiągane akurat w znalezionym punkcie.

b) Znaleźć minimum funkcji $f(x)$ przy warunkach $\langle x, a\rangle = 1$ oraz $\langle x, b\rangle = 0$.

○ **5.23** (świetne)**.** Załóżmy, że $M \subset \mathbb{R}^k$ jest rozmaitością wymiaru m $(1 \leqslant m \leqslant k-1)$, $a \notin M$, zaś $x_0 \in M$ spełnia $\|a - x_0\|_2 = \inf\{\|a - x\|_2 : x \in M\}$. Wykazać, że $a - x_0 \perp T_{x_0}M$.

Uwaga. To zadanie dobrze sprawdza zrozumienie tematyki – można je rozwiązać w pamięci (bez trudnych rachunków, skomplikowanych oznaczeń, machania rękami) i przedstawić rozwiązanie prawie pozbawione „znaczków".

5.24. Niech

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+4y^2+z^2 = 1,\ 3x^2+2y^2+2z^2 = 1\},$$
$$f(x,y,z) = 10x + 6z \quad \text{dla } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Uzasadnić, że E jest rozmaitością (jakiego wymiaru?). Uzasadnić, że funkcja $f_{|E}\colon E \to \mathbb{R}$ osiąga w pewnym punkcie zbioru E swą wartość minimalną i wyznaczę tę wartość.

W ramach autosprawdzenia. Wychodzi trochę mniej niż $-28/5$.

5.25. Niech

$$A = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x^2+y^2 = 1,\ z^2+t^2 = 1\},$$
$$f(x,y,z) = 2xt + yz \quad \text{dla } (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4.$$

a) Uzasadnić, że A jest rozmaitością (jakiego wymiaru?).

b) Uzasadnić, że funkcja $f_{|A}\colon A \to \mathbb{R}$ osiąga w pewnym punkcie zbioru A swą wartość minimalną i wyznaczyć tę wartość.

Sugestia. Nie zawsze trzeba korzystać z twierdzenia o lokalnych ekstremach warunkowych.

5.26. Niech

$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 - xy + yz + zx = 1\}$$

Uzasadnić, że zbiór P jest rozmaitością. Znaleźć kres górny odległości punktów zbioru P od osi $0z$.

Sugestia. Nie zawsze trzeba korzystać z twierdzenia o lokalnych ekstremach warunkowych.

5.27. Znaleźć kres dolny odległości punktu $(1, 1, 2)$ od punktów zbioru

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy + z^2 = 0\}.$$

5.28. Niech $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 + 4 = 0\}$. Znaleźć w zbiorze H punkt, którego odległości od punktu $(2, 4, 0)$ jest najmniejsza.

5.29. Wyznaczyć liczby $x_1, \ldots, x_n \geqslant 0$ o sumie $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, dla których wartość iloczynu $x_1 x_2^2 \ldots x_n^n$ jest największa.

5.30. W przestrzeni $\mathbb{R}^k$ rozważamy sferę $S = \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\|_2 = 1\}$ oraz funkcję $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem $f(x) = \langle Ax, x\rangle$ dla $x \in \mathbb{R}^k$, gdzie A jest pewną macierzą symetryczną rozmiaru $k \times k$ o współczynnikach rzeczywistych. Wykazać, że punkty, w których funkcja $f_{|S}$ osiąga swoje wartości ekstremalne, są pewnymi wektorami własnymi macierzy A. Czym są mnożniki λ_i, które daje metoda Lagrange'a?

A. Teoria miary

Komentarz. Wchodzimy w XX wiek. Na wykładzie wystąpią (m.in., w kolejności alfabetycznej): Émile Borel (1871–1956), Constantin Carathéodory (1873–1950), Pierre Fatou (1878–1929), Maurice Fréchet (1878–1973), Guido Fubini (1879–1943), Henri Lebesgue (1875–1941), Nikołaj Łuzin (1883–1950), Giuseppe Vitali (1875–1932).[1]

Materiał do omówienia na zajęciach [4+ ćw. (?)]

Teoria. Zbiór Vitaliego (!).

Teoria. Definicja σ-ciała (zbiór pusty, dopełnienia, przeliczalne sumy). Definicja σ-ciała generowanego przez rodzinę zbiorów.

• **A.1.** a) Znaleźć $\sigma\big(\{1,2,3,4\},\{3,4,5\}\big)$ (w przestrzeni $\{1,2,3,4,5\}$).
b) Uzasadnić, że jeśli σ-ciało jest skończone, to liczba jego elementów wynosi 2^n dla pewngo $n \in \mathbb{N}$.
c) Wykazać, że nie istnieje σ-ciało nieskończone przeliczalne.

• **A.2.** Poniżej X, Y to dowolne zbiory, $\mathcal{F}$ to σ-ciało w X, $f\colon X \to Y$ to pewne przekształcenie.
a) Czy $\{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$ musi być σ-ciałem [w Y]?
b) Załóżmy, że f jest „na". Czy $\{f(A) : A \in \mathcal{F}\}$ musi być σ-ciałem [w Y]?
c+d) Patrz zadanie A.15.

Teoria. Definicja σ-ciała zbiorów borelowskich (siłą rzeczy w przestrzeni topologicznej). Zbiory typu G_δ, zbiory typu F_σ.[2]

• **A.3.** Dane są funkcje ciągłe $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Niech

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0\},$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\},$$
$$C = \{x \in \mathbb{R} : \text{ ciąg } (f_n(x))_{n\geqslant 1} \text{ jest zbieżny i granica jest liczbą wymierną}\},$$
$$D = \{x \in \mathbb{R} : \text{ ciąg } (f_n(x))_{n\geqslant 1} \text{ jest zbieżny i granica jest liczbą niewymierną}\},$$

[1] Dla porównania (wybór subiektywny, kolejność z grubsza chronologiczna): Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), Isaac Newton (1642–1726/27), Brook Taylor (1685–1731), Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), Karl Weierstrass (1815–1897), Bernhard Riemann (1826–1863), usu Jean-Gaston Darboux (1842–1917).

[2] Notacja pochodzi od Hausdorffa: G od niem. *Gebiet* 'obszar', δ od D jak *Durchschnitt* 'przecięcie'; F od fr. *fermé* 'zbiór domknięty', σ od S jak *somme* 'suma'.

$$E = \{x \in \mathbb{R} : \text{ ciąg } (f_n(x))_{n\geqslant 1} \text{ jest zbieżny (do granicy właściwej)}\}.$$

Rozstrzygnąć, które z tych zbiorów są borelowskie.

○ **A.4.** a) Uświadomić sobie, że $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem typu F_σ, zaś $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem typu G_δ.

b) Wykazać, że $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ jest nie jest zbiorem typu G_δ, zaś $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ nie jest zbiorem typu F_σ. *Wskazówka.* Twierdzenie Baire'a z wykładu topologii.

c) Podać przykład zbioru borelowskiego, który nie jest ani typu G_δ, ani typu F_σ.

***

Teoria. Miara zewnętrzna (określona na *wszystkich* podzbiorach, zero na $\emptyset$, monotoniczna, przeliczalnie podaddytywna), miara (określona na *pewnym* σ-ciele, zero na $\emptyset$, przeliczalnie addytywna [na zbiorach rozłącznych]).

Teoria (ogólna). Warunek Carathéodory'ego.[3] Dowodzi się, że:

- zbiór $\mathcal{F}(\mu^*)$ złożony ze zbiorów spełniających warunek Carathéodory'ego jest σ-ciałem (!),
- po obcięciu μ^* do $\mathcal{F}(\mu^*)$ dostaniemy miarę (!),
- zbiory o mierze zewnętrznej 0 należą do $\mathcal{F}(\mu^*)$ (!),
- jeśli nasza miara zewnętrzna jest metryczna,[4] to zbiory borelowskie należą do $\mathcal{F}(\mu^*)$ (!).

Teoria (konkretna). Miara zewnętrzna Lebesgue'a w $\mathbb{R}^k$ (ozn. λ_k^*; infimum sum objętości przedziałów [k-wymiarowych] stanowiących pokrycie zbioru). Sprawdza się, że jest to miara zewnętrzna metryczna na $\mathbb{R}^k$, więc z ogólnej teorii wynika istnienie σ-ciała (zawierającego zbiory borelowskie i zbiory miary [zewnętrznej] zero), po obcięciu do którego dostajemy miarę (ozn. λ_k).

Uwaga. Popularne oznaczenia na miarę Lebesgue'a to m.in.: $\lambda_k(\cdot)$, $\ell_k(\cdot)$, $\mathcal{L}_k(\cdot)$, $\mathrm{vol}_k(\cdot)$ (lub po prostu $\mathrm{vol}(\cdot)$ z k w domyśle), $|\cdot|$ (nawet gdy jednocześnie oznacza też normę euklidesową).

Umowa. Poniżej w przypadku podzbiorów $\mathbb{R}^k$ domyślną miarę jest [odpowiedniowymiarowa] miara Lebesgue'a (i domyślnym σ-ciałem jest σ-ciało zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a).

• **A.5** (por. zad. A.23)**.** a) Zbiór $A \subset \mathbb{R}^2$ jest mierzalny, P_1 jest rzutem ortogonalnym $\mathbb{R}^2$ na oś OX. Czy zbiór $P(A)$ [traktowany jako podzbiór $\mathbb{R}$] musi być mierzalny?

b) Zbiór $B \subset \mathbb{R}^2$ jest spójny. Czy musi być mierzalny?

• **A.6** (patrz też zadanie A.29)**.** Znaleźć miary zbiorów:

$$A = \{x \in [0,1] : \text{ w rozwinięciu dziesiętnym } x \text{ nie występuje cyfra } 3\},$$
$$C = \text{ standardowy [trójkowy] zbiór Cantora},$$
$$E = \{x \in [0,1] : \text{ w rozwinięciu dziesiętnym } x \text{ nie występuje blok } 5050\}.$$

[3] Niech $\mu^* : 2^X \to [0, +\infty]$ będzie miarą zewnętrzną. Zbiór $A \subset X$ spełnia warunek Carathéodory'ego wtedy i tylko wtedy, gdy dla *każdego* zbioru $Z \subset X$ zachodzi $\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A)$.

[4] Tzn. jesteśmy w przestrzeni metrycznej oraz $\mathrm{dist}(A, B) := \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\} > 0 \implies \mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$.

Uwaga. Zbiór Cantora jest zwarty, brzegowy (ma puste wnętrze, tzn. nie zawiera żadnego przedziału otwartego (szczególności jest też nigdziegęsty (jego domknięcie też ma puste wnętrze))) i ma moc $\mathfrak{c}$. W szczególności zawiera coś więcej, niż tylko przeliczalnie wiele końców odcinków otwartych wyrzucanych w kolejnych krokach konstrukcji. Każdy jego punkt jest jego punktem skupieniem. Patrz też zadanie A.32 o „tłustych” zbiorach Cantora.

• **A.7** (funkcja Cantora, diabelskie schody)**.** a) Skonstruować funkcję $f\colon [0,1] \to [0,1]$, która jest ciągła, niemalejąca, „na” i prawie wszędzie $f'(x) = 0$ (pochodna istnieje poza zbiorem miary zero i tam, gdzie istnieje, jest równa zero).

b) Znaleźć przykład zbioru mierzalnego $A \subset [0,1]$, takiego że $f(A)$ jest niemierzalny.

Teoria. Tw. charakteryzujące zbiory mierzalne w sensie Lebesgue'a.

Uwaga. Można udowodnić, że zbiorów borelowskich w $\mathbb{R}^k$ jest $\mathfrak{c}$. Zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a jest $2^{\mathfrak{c}}$ (podzbiory zbioru Cantora mają miarę zero). Z drugiej strony, zbiory mierzalne w sensie Lebesgue'a to zasadniczo – z dokładnością do zbioru miary zero – zbiory typu F_σ (patrz charakteryzacja z wykładu).

• **A.8.** Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest lipschitzowska, zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest mierzalny [w sensie Lebesgue'a]. Wykazać, że zbiór $f(A)$ jest mierzalny [w sensie Lebesgue'a].

◦ **A.9.** Dany jest [mierzalny] zbiór $A \subset [0,1]$, taki że $\lambda_1(A) > 0$. Wykazać, że dla każdego $b \in [0, \lambda_1(A)]$ istnieje [mierzalny] zbiór $B \subset A$, taki że $\lambda_1(B) = b$.

◦ **A.10** (standardowe)**.** Znaleźć miary zbiorów:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in \mathbb{Q}\},$$
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \text{ istnieją } a, b \in \mathbb{Q} \text{ takie, że } (x-a)^2 + (y-b)^2 \in \mathbb{Q}\},$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy - x - y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

Teoria. Liniowy obraz zbioru mierzalnego. Iloczyn kartezjański zbiorów mierzalnych.

***

Teoria. Definicja funkcji mierzalnej.[5] Własności (przeciwobrazy innych zbiorów; własności arytmetyczne, supremum/infimum przeliczalnej rodziny f. mierzalnych, granica punktowa f. mierzalnych).

Umowa. W przypadku funkcji określonych na $X = \mathbb{R}^k$ [w dziedzinie] domyślnie rozważamy σ-ciało zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a.

Komentarz. Przygotowujemy się do wprowadzenia całki [Lebesgue'a], ale poniższe zadania tematycznie pasują do tego rozdziału (bo na razie żadnych całek jeszcze nie ma, a jest dużo σ-ciał).

[5] Mamy $(X, \mathcal{F})$ oraz $f\colon X \to [-\infty, +\infty]$; zbiory $\{x \in X : f(x) > a\} = f^{-1}((a, +\infty])$ mają być mierzalne (należeć do $\mathcal{F}$).

• **A.11.** a) Podać przykład mierzalnej funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która nie ma żadnego punktu ciągłości.
b) Podać przykład funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która nie jest mierzalna.
c) Podać przykład świadczący o tym, że jeśli funkcje $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa mierzalne $(i \in I)$, to funkcja $\sup_{i\in I} f_i$ nie musi być funkcją mierzalną, jeśli zbiór indeksów I nie jest przeliczalny.
d) Podać przykład funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która jest mierzalna [jeśli w dziedzinie rozważamy σ-ciała zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a], ale nie jest jest mierzalna, jeśli w dziedzinie rozważamy σ-ciało zbiorów borelowskich.
e) Wykazać, że jeśli funkcja $f\colon X \to \mathbb{R}$ jest mierzalna [w szczególności w zbiorze X mamy jakieś σ-ciało $\mathcal{F}$], to dla dowolnego zbioru borelowskiego $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ zbiór $f^{-1}(A)$ jest mierzalny [należy do $\mathcal{F}$].

• **A.12.** a) Dane są funkcje mierzalne $f, g\colon X \to [-\infty, +\infty]$ oraz zbiór [mierzalny] $A \in \mathcal{F}$. Sprawdzić, że funkcja $h\colon X \to [-\infty, +\infty]$ zdefiniowana wzorem

$$h(x) := f(x)\mathbf{1}_{\{x\in A\}} + g(x)\mathbf{1}_{\{x\in X\setminus A\}} = \begin{cases} f(x) & \text{jeśli } x \in A, \\ g(x) & \text{jeśli } x \in X \setminus A, \end{cases}$$

jest mierzalna.
b) Uświadomić sobie, że gdybyśmy mieli nieco dłuższą klamerkę (przeliczalnie wiele funkcji [mierzalnych], przeliczalnie wiele [mierzalnych] kawałków), to nic się nie zmienia.
c) Uświadomić sobie, że w szczególności jest sens mówić o mierzalności, jeśli funkcja jest określona „tylko” *prawie wszędzie.*

• **A.13.** a) Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna. Uzasadnić, że funkcja f' jest mierzalna.
b) Czy jeśli założymy tylko, że f jest różniczkowalna prawie wszędzie, to można coś powiedzieć o f'?

Teoria. Funkcje proste. Przybliżanie nieujemnych funkcji mierzalnych.

Teoria. Twierdzenia Łuzina (obcięcie ciągłe [na dużym zbiorze domkniętym]), Frécheta (granica punktowa funkcji ciągłych), Jegorowa (zbieżność jednostajna); miara regularna.

Zadania treningowe, uzupełniające, dodatkowe

A.14. Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną wszystkich takich zbiorów $A \subset X$, że co najmniej jeden ze zbiorów A, $X \setminus A$ jest [co najwyżej] przeliczalny. Sprawdzić, że $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem [w X].

◦ **A.15** (c.d. zadania A.2)**.** Poniżej X, Y to dowolne zbiory, $\mathcal{G}$ to σ-ciało w Y, $f\colon X \to Y$ to pewne przekształcenie.
c) Czy $\{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{G}\}$ musi być σ-ciałem [w X]?
d) Załóżmy, że f jest „na”. Czy $\{A \subset X : f(A) \in \mathcal{G}\}$ musi być σ-ciałem [w X]?

A.16 (FYI, będzie na RP, na razie nie jest kluczowe)**.** Rodzinę zbiorów $\mathcal{P}$ nazywamy π-układem, jeśli

$$A, B \in \mathcal{P} \implies A \cap B \in \mathcal{P}.$$

Rodzinę zbiorów $\mathcal{L}$ nazywamy λ-układem, jeśli spełnia następujące warunki: (i) $X \in \mathcal{L}$, (ii) jeśli $A, B \in \mathcal{L}$ oraz $B \subset A$, to $A \setminus B \in \mathcal{L}$, (iii) jeśli $A_n \in \mathcal{L}$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, to $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{L}$

a) Uzasadnić, że rodzina zbiorów, która jest jednocześnie π- i λ-układem, jest σ-ciałem.

b) Podać przykład π-układu, który nie jest λ-układem, oraz λ-układu, który nie jest π-układem.

c) Wykazać, że jeśli λ-układ $\mathcal{L}$ zawiera π-układ $\mathcal{P}$, to $\mathcal{L}$ zawiera $\sigma(\mathcal{P})$.

A.17. Dana jest funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (dowolna). Wykazać, że zbiór

$$\{x \in \mathbb{R} : \text{ funkcja } f \text{ jest ciągła w } x\}$$

jest zbiorem borelowskim (a wręcz zbiorem typu G_δ).

A.18. Uświadomić sobie, że [w przestrzeni topologicznej X] zbiór $A \subset X$ jest zbiorem typu G_δ [względem X] wtedy i tylko wtedy, gdy $X \setminus A$ jest zbiorem typu F_σ [względem X].

○ **A.19** (pushforward; oczywiste, ale ważne)**.** Dana jest przestrzeń z miarą $(X, \mathcal{F}, \mu)$ oraz pewne przekształcenie $f\colon X \to Y$. Niech

$$\mathcal{G} \coloneqq \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\},$$
$$\nu(B) \coloneqq \mu(f^{-1}(B)) \quad \text{dla } B \in \mathcal{G}.$$

Sprawdzić, że $\mathcal{G}$ jest σ-ciałem [w Y], zaś $\nu\colon \mathcal{G} \to [0, +\infty]$ jest miarą.

A.20. Na przestrzeni $X = \{1, 2, 3\}$ definiujemy $\mu^*(\emptyset) = 0$, $\mu^*(X) = 2$, $\mu^*(A) = 1$ jeśli $A \subset X$, $A \neq \emptyset \neq X \setminus A$. Sprawdzić, że μ^* jest miarą zewnętrzną na X i że jedynymi zbiorami spełniającymi warunek Carathéodory'ego są $\emptyset$ oraz X.

A.21 (zgrabne)**.** Dany jest zbiór X i miara zewnętrzna μ^* określona na jego podzbiorach, taka że $\mu^*(X) < \infty$. Dla $A \subset X$ definiujemy

$$\nu^*(A) = \frac{\mu^*(A)}{1 + \mu^*(A)}.$$

Wykazać, że ν^* jest miarą zewnętrzną na X.

○ **A.22.** *Komentarz/motywacja.* Załóżmy, że określiliśmy sobie jakąś miarę zewnętrzną μ^* (np. miarę zewnętrzną Lebesgue'a w $\mathbb{R}^k$) i zastanawiamy się, czy da się znaleźć jakieś nietrywialne σ-ciało, na którym ta miara zewnętrzna jest prawdziwą miarą (przeliczalnie addytywną, a nie tylko podaddytywną), ale konstrukcja przez warunek

Carathéodory'ego wydaje nam się zbyt mistyczna i dziwaczna. Na pewno powinno być tak, że jeśli zbiór A jest mierzalny, to zbiór $X \setminus A$ też i ponadto

$$\mu^*(X) = \mu(X) \overset{\text{chcemy}}{=} \mu(A) + \mu(X \setminus A) = \mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A).$$

Niniejsze zadanie pokazuje, że – przy pewnych drobnych założeniach technicznych (z którymi często nie ma problemów, por. zadanie A.37) – taki naturalny warunek implikuje już sformułowany na wykładzie warunek Carathéodory'ego.

◦ *Właściwa treść zadania.* Załóżmy, że μ^* jest miarą zewnętrzną na X, taką że $\mu^*(X) < \infty$. Załóżmy ponadto, że dla każdego zbioru $Z \subset X$ istnieje zbiór $Z \subset B \subset X$, który jest mierzalny (tj. spełnia warunek Carathéodory'ego) i $\mu^*(Z) = \mu^*(B)$. Przypuśćmy, że $A \subset X$ jest zbiorem, takim że

$$\mu^*(X) = \mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A).$$

Wykazać, że zbiór A jest mierzalny.

Ogólny plan pracy i pierwszy krok. Oczywiście trzeba sprawdzić, że A spełnia warunek Carathéodory'ego. W tym celu bierzemy dowolny zbiór $Z \subset X$, można do niego dobrać mierzalny zbiór B jak wyżej. Wykazać najpierw, że

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A).$$

Wskazówka do pierwszego kroku. Zbiór B spełnia warunek Carathéodory'ego – trzeba wypisać ten warunek dla zbiorów testowych A i $X \setminus A$ (żadnych innych [rozsądnych] kandydatów na zbiory testowe nie mamy) i trochę pożonglować podaddytywnością i prawami de Morgana.

Drugi krok. Wywnioskować, że także

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A).$$

A.23 (o pewnym słynnym błędzie)**.** *Motywacja.* Niech $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie rzutem na pierwszą współrzędną: $P(x, y) = x$ dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Okazuje się, że jeśli zbiór $A \subset \mathbb{R}^2$ jest borelowski, to zbiór $P(A)$ *nie* musi być borelowski [w $\mathbb{R}$]. Przy odrobinie nieuwagi łatwo jednak uwierzyć w następujący [błędny!] szkic dowodu [nieprawdziwego (!) twierdzenia]: „Jeśli zbiór $U \subset \mathbb{R}^2$ jest otwarty, to zbiór $P(U)$ jest otwarty [w $\mathbb{R}$]. Ponieważ zbiory otwarte generują σ-ciało zbiorów borelowskich, to jeśli $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, to $P(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$".

Poniższe proste podpunkty mają pokazać, nad jakimi [m.in.] szczegółami zupełnie prześlizgnięto się w powyższym „dowodzie".

a) Uzasadnić, że jeśli zbiór $U \subset \mathbb{R}^2$ jest otwarty, to zbiór $P(U)$ jest otwarty [w $\mathbb{R}$].

b) Podać przykład zbioru domkniętego $F \subset \mathbb{R}^2$, takiego że zbiór $P(F)$ nie jest domknięty [w $\mathbb{R}$].

c) Podać przykład [dowolnych] zbiorów $A, B, C \subset \mathbb{R}^2$ takich, że $P(A \cap B) \neq P(A) \cap P(B)$ oraz $P(\mathbb{R}^2 \setminus C) \neq \mathbb{R} \setminus P(C)$.

d) Uświadomić sobie, że jeśli $A \subset B \subset \mathbb{R}^2$, to $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

e) Podać przykład zstępującej przeliczalnej rodziny zbiorów otwartych $U_1 \supset U_2 \supset \dots$ [w $\mathbb{R}^2$], takiej że $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n) \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} P(U_n)$. Uświadomić sobie w szczególności, że jest pewien kłopot z kontrolowaniem rzutów zbiorów typu G_δ.

f) Uzasadnić, że jeśli $F \subset \mathbb{R}^2$ jest zbiorem domkniętym, to $P(F)$ jest zbiorem borelowskim [w $\mathbb{R}$]. Wywnioskować, że jeśli $F' \subset \mathbb{R}^2$ jest zbiorem typu F_σ, to $P(F')$ jest zbiorem borelowskim [w $\mathbb{R}$].

Informacja (bez dowodu). Nawet rzut zbioru typu G_δ nie musi być zbiorem borelowskim. Korzystając z teorii zbiorów analitycznych Suslina można jednak wykazać, że obraz zbioru borelowskiego [przy rzucie ortogonalnym] jest zbiorem mierzalnym.

A.24. Zbiór $A \subset \mathbb{R}^2$ jest spójny (ale być może niemierzalny), funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest ciągła. Czy można coś powiedzieć o mierzalności [w sensie Lebesgue'a] zbioru $f(A)$?

A.25. Niech $B(0,1)$ będzie kulą jednostkową w $\mathbb{R}^3$. Banach i Tarski wykazali, że istnieją parami rozłączne zbiory $A_1, \dots, A_5 \subset B(0,1)$ oraz izometrie $f_i\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $i \in \{1,2,3,4,5\}$, takie że

$$B(0,1) = f_1(A_1) \cup f_2(A_2) \cup f_3(A_3) = f_4(A_4) \cup f_5(A_5),$$

gdzie obie powyższe sumy są sumami zbiorów parami rozłącznych. Uzasadnić – elementarnie, bez odwoływania się do szczegółów konstrukcji – że co najmniej cztery ze zbiorów $A_1, \dots, A_5$ muszą być niemierzalne.

A.26. Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem [mierzalnym] o dodatniej mierze Lebesgue'a. Wykazać, że istnieją liczby $x, y \in A$ takie, że $x - y \in \mathbb{Q}$.

Wskazówka. Przypomnieć sobie przykład Vitaliego.

A.27. Czy liczby $1/5$, $1/4$, $1/\pi$ należą do [standardowego trójkowego] zbioru Cantora?

A.28. a) Niech C to [standardowy trójkowy] zbiór Cantora. Wykazać, że $C + C = [0,2]$ (tu $C + C = \{x + y : x \in C, y \in C\}$ to suma Minkowskiego zbiorów).

b) Czym jest $C - C = \{x - y : x \in C, y \in C\}$?

∘ **A.29.** Znaleźć miary Lebesgue'a niżej opisanych zbiorów [w szczególności uzasadnić ich mierzalność]. *Wskazówka.* Nie warto brnąć w straszne rachunki (a warto zerknąć na rozwiązania zadania A.6).

a) Zbiór tych liczb z przedziału $[0,1]$, których rozwinięcie dziesiętne zawiera bloki cyfr 123, 456 oraz 789.

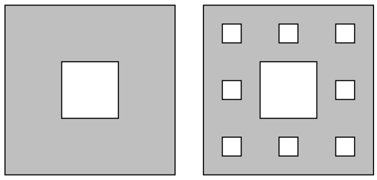
b) Zbiór tych liczb z przedziału $[0,1]$, w których rozwinięciu dziesiętnym cyfra 3 występuje nieskończenie wiele razy.

c) Zbiór tych liczb z przedziału $[0,1]$, w których rozwinięciu dziesiętnym występuje każdy z [przeliczalnie wielu] bloków

$$3, \quad 31, \quad 314, \quad 3141, \quad 31415, \quad 314159, \quad 3141592, \quad 31415926, \quad \dots$$

d) Zbiór tych liczb z przedziału $[0,1]$, w których rozwinięciu dziesiętnym występuje każdy z [przeliczalnie wielu] bloków

$$11, \quad 101, \quad 1001, \quad 10001, \quad 100001, \quad 1000001, \quad 10000001, \quad \dots$$



Rysunek A.1.: Zadanie A.31 – dwa pierwsze kroki konstrukcji.

e) Zbiór tych liczb z przedziału $[0, 1]$, w których rozwinięciu dziesiętnym każdy z [przeliczalnie wielu] bloków wymienionych w podpunkcie d) występuje nieskończenie wiele razy.

A.30. Poniżej rozważamy rozwinięcia czwórkowe $0, c_1c_2c_3\dots$ (z cyframi $c_i \in \{0, 1, 2, 3\}$).

Niech A będzie zbiorem tych liczb z przedziału $[0, 1]$, których rozwinięcie czwórkowe $0, c_1c_2c_3\dots$ spełnia warunek $c_nc_{n+1} = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Niech B będzie zbiorem tych liczb z przedziału $[0, 1]$, których rozwinięcie czwórkowe $0, c_1c_2c_3\dots$ spełnia warunek $c_{2n-1}c_{2n+1}c_{2n+3} = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Wykazać, że oba te zbiory są miary zero.

Wskazówka. Nie warto brnąć w straszne rachunki (a warto zerknąć na rozwiązania zadania A.6 (i A.29 (?))).

A.31 (dywan Sierpińskiego)**.** Kwadrat $[0, 1]^2$ dzielimy na 9 przystających kwadratów i wyrzucamy środkowy. Następnie w każdym z pozostałych ośmiu mniejszych kwadratów powtarzamy tę procedurę (patrz Rysunek A.1) – i tak dalej. Doprecyzować opis konstrukcji i obliczyć dwuwymiarową miarę Lebesgue'a powstałej figury.

Pytanko dodatkowe z topologii. Czy otrzymany zbiór jest spójny? (A łukowo spójny?)

A.32 („tłusty" zbiór Cantora)**.** a) Uświadomić sobie, że modyfikując konstrukcję zbioru Cantora (zmieniając długości odcinków wyrzucanych w kolejnych krokach) można uzyskać zbiór o dodatniej mierze Lebesgue'a.

b) Uzasadnić, że otrzymany zbiór jest homeomorficzny ze standardowym zbiorem Cantora. W szczególności uświadomić sobie, że zbiór miary dodatniej nie musi zawierać żadnego odcinka otwartego.

○ **A.33.** Podać przykład zstępującego ciągu zbiorów mierzalnych $\mathbb{R} \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$, takiego że

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_1(A_n) \neq \lambda_1\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big).$$

A.34. Ustalmy $\delta > 0$. Wykazać, że

$$A = \big\{x \in [0,1] : \ \exists\ (p_n)_{n=1}^{\infty},\ (q_n)_{n=1}^{\infty},\ p_n, q_n \in \mathbb{N},\ q_1 < q_2 < q_3 < \dots,\\ \text{takie że } |x - p_n/q_n| < 1/q_n^{2+\delta}\big\}$$

jest zbiorem miary zero.

W ramach autosprawdzenia (wskazówka?). Rozwiązanie powinno się psuć dla $\delta = 0$.

○ **A.35** (miłe)**.** a) Funkcja $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ jest niemalejąca. Wykazać, że jej wykres jest podzbiorem miary [Lebesgue'a] zero w $\mathbb{R}^2$.

b) Czy teza pozostaje w mocy, jeśli dziedziną funkcji będzie inny przedział (niekoniecznie jest domknięty, niekoniecznie skończony)?

○ **A.36.** a) Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła. Wykazać, że jej wykres $\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ jest podzbiorem miary zero płaszczyzny.

Sugestia. Nie machać rękami – dla każdego $\varepsilon > 0$ wskazać odpowiednie pokrycie wykresu prostokątami.

b) Przemyśleć, czy coś się zmienia, jeśli rozważamy przypadek wielowymiarowy ($(k+l)$-wymiarowa miara Lebesgue'a wykresu funkcji ciągłej $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$).

c) Czy wykres funkcji $(0,\infty) \ni x \mapsto \sin(1/x)$ jest podzbiorem płaszczyzny miary zero?

d) Czy wykres funkcji $(0,\infty) \ni x \mapsto \frac{1}{x}\sin(\frac{1}{x})$ jest podzbiorem płaszczyzny miary zero?

A.37. Niech $A \subset \mathbb{R}^k$ będzie zbiorem, takim że $\lambda_k^*(A) < \infty$ (nie zakładamy, że A jest mierzalny w sensie Lebesgue'a). Wykazać, że istnieje zbiór borelowski $B \subset \mathbb{R}^k$, taki że $A \subset B$ oraz $\lambda_k^*(A) = \lambda_k(B)$.

A.38. a) Załóżmy, że $P \subset \mathbb{R}^k$ jest [k-wymiarowym] przedziałem, $A \subset P$, zbiór A jest domknięty oraz $\lambda_k(A) = \lambda_k(P)$. Wykazać, że $A = P$.

b) Załóżmy, że $Q \subset \mathbb{R}^k$ jest [k-wymiarowym] przedziałem otwartym, zbiór $B \subset Q$ jest otwarty oraz $\lambda_k(B) = \lambda_k(Q)$. Czy musi być $B = Q$?

A.39. Dany jest zbiór [mierzalny] $A \subset \mathbb{R}^k$, taki że $\lambda_k(A) > 0$. Wykazać, że dla każdego $c \in (0,1)$ istnieje pewien k-wymiarowy przedział P, taki że $\lambda_k(A \cap P) > c\lambda_k(P)$.

○ **A.40** (nieco trudniejsze, ale robialne)**.** Załóżmy, że zbiór [mierzalny] $A \subset \mathbb{R}$ ma miarę dodatnią. Wykazać, że istnieje $\delta > 0$, taka że $[-\delta, \delta] \subset A - A$.

Uwaga. To zadanie nie jest trywialne. W szczególności nie jest prawdą, że jeśli A jest miary dodatniej, to musi zawierać pewien przedział (przykład?). Proszę też zwrócić uwagę, że $A - A$ może zawierać pewien przedział nawet, jeśli A ma miarę zero (przykład?).

A.41. Załóżmy, że zbiór [mierzalny] $A \subset \mathbb{R}$ ma miarę dodatnią. Wykazać, że istnieje zbiór niemierzalny $E \subset A$.

Wskazówka (?). Być może warto najpierw zrobić zadanie A.40.

A.42. Rozstrzygnąć, czy brzeg obszaru (tj. zbioru otwartego i spójnego) w $\mathbb{R}^k$ musi mieć miarę Lebesgue'a zero.

○ **A.43** (szczególny przypadek tw. Sarda)**.** Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1. Niech $Z = \{x \in \mathbb{R} : f'(x) = 0\}$. Wykazać, że $f(Z)$ jest zbiorem miary [Lebesgue'a] zero.

Wskazówka (?). Być może warto zerknąć na rozwiązanie zadania A.8.

A.44 ((bardzo?) trudne, por. zad. A.7)**.** Skonstruować funkcję $f\colon [0,1] \to [0,1]$, która jest ciągła, *ściśle* rosnąca, „na" i prawie wszędzie $f'(x) = 0$ (pochodna istnieje poza zbiorem miary zero i tam, gdzie istnieje, jest równa zero).

A.45 (kolokwium 2024)**.** Niech μ będzie miarą określoną na borelowskich podzbiorach $\mathbb{R}$. Załóżmy, że $\mu(A) = 1$ dla dowolnego zbioru borelowskiego $A \subset \mathbb{R}$ takiego, że $\lambda_1(A) = 1$.

a) Wykazać, że $\mu(Z) = 0$ dla dowolnego zbioru borelowskiego Z takiego, że $\lambda_1(Z) = 0$,

b) Wykazać, że $\mu([a, a + \frac{1}{2}]) = \frac{1}{2}$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$.

c) Wykazać, że $\mu([a, b]) = b - a$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

A.46 (łagodny wstęp do miary Hausdorffa)**.** Dla $\alpha \geqslant 0$, $\delta > 0$ i zbioru $A \subset \mathbb{R}$ kładziemy

$$\mathcal{H}^\alpha_\delta(A) \coloneqq \inf\Big\{\sum_{i=1}^\infty (\mathrm{diam}(E_i))^\alpha : \quad A \subset \bigcup_{i=1}^\infty E_i,\ \mathrm{diam}(E_i) \leqslant \delta\Big\},$$

gdzie $\mathrm{diam}(E) = \sup\{|x - y| : x, y \in E\}$ dla $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}$ (i $\mathrm{diam}(\emptyset) = 0$).

a) Uświadomić sobie, że jeśli $0 < \delta_2 < \delta_1$, to $\mathcal{H}^\alpha_{\delta_2}(A) \geqslant \mathcal{H}^\alpha_{\delta_1}(A)$, więc w szczególności można zdefiniować

$$\mathcal{H}^\alpha(A) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^\alpha_\delta(A) = \lim_{\delta\to 0^+} \mathcal{H}^\alpha_\delta(A).$$

b) Uświadomić sobie, że $\mathcal{H}^\alpha$ jest miarą zewnętrzną.

c) Niech $C \subset [0, 1]$ będzie standardowym trójkowym zbiorem Cantora. Przyjrzeć się konstrukcji i uświadomić sobie, jakie [coraz drobniejsze] pokrycia jest naturalnie rozważać w definicji $\mathcal{H}^\alpha_\delta(C)$. Następnie zapostulować, jakie $\alpha \in (0, 1)$ należałoby dobrać, żeby [przy $\delta \to 0^+$] otrzymać $0 < \mathcal{H}^\alpha(C) < \infty$.

e) Wykazać (lub co najmniej zaagitować), że

- jeśli $\mathcal{H}^\alpha(A) = 0$, to $\mathcal{H}^\beta(A) = 0$ dla $\beta > \alpha$,
- jeśli $\mathcal{H}^\alpha(A) > 0$, to $\mathcal{H}^\beta(A) = \infty$ dla $\beta < \alpha$.

(W szczególności, dla każdego dla każdego zbioru $A \subset \mathbb{R}$ istnieje co najwyżej jedna liczba α taka, ze $\mathcal{H}^\alpha(A) \in (0, \infty)$). Liczbę

$$\dim_H(A) \coloneqq \inf\{\alpha \geqslant 0 : \mathcal{H}^\alpha(A) = 0\}$$

nazywamy wymiarem Hausdorffa zbioru A).

f) Uświadomić sobie, że miarę zewnętrzną $\mathcal{H}^\alpha$ (oraz wymiar Hausdorffa) można praktycznie tak samo zdefiniować w $\mathbb{R}^n$ (w definicji średnicy bierzemy $\|x - y\|_2$), a wręcz w dowolnej przestrzeni metrycznej (X, d) (w definicji średnicy bierzemy $d(x, y)$).

FYI. Ponadto $\mathcal{H}^\alpha$ jest miarą zewnętrzną *metryczną* (więc zbiory borelowskie spełniają warunek Carathéodory'ego, tj. są mierzalne).

Dla chętnych. Uściślić wszystko i uzupełnić brakujące szczegóły, w szczególności wykazać metryczność (w ogólnym przypadku).

A.47. Na wykładzie prawdopodobnie zostały co najmniej sformułowane jakieś fakty w stylu: jeśli funkcje $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ oraz $h \colon X \to (0, \infty)$ sa mierzalne, to także funkcje $|f|$, $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, f/h, h^f są mierzalne.

a) Udowodnić te fakty, które nie zostały udowodnione na wykładzie.

b) Uświadomić sobie, że jeśli dopuszczamy by f, g przyjmowały także wartości $\pm\infty$, to teza jest nadal prawdziwa (o ile nie ma problemów z określonością (tzn. wykluczamy np. sytuację $f + g$ dla $f \equiv +\infty$, $g \equiv -\infty$); uświadomić sobie w szczególności, że jeśli problemy z określonością są tylko na zbiorze miary zero, to nie ma żadnych problemów).

A.48. Dana jest funkcja $f\colon X \to \mathbb{R}$ [oraz pewne σ-ciało $\mathcal{F}$ podzbiorów X].
a) Załóżmy, że funkcja f jest mierzalna. Czy funkcja f^2 musi być mierzalna?
b) Załóżmy, że funkcja funkcja f^2 jest mierzalna. Czy funkcja f musi być mierzalna?
c) Załóżmy, że funkcja funkcja f^3 jest mierzalna. Czy funkcja f musi być mierzalna?

A.49. Sprawdzić, że funkcja niemalejąca $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest mierzalna.

A.50. a) Uświadomić sobie, że funkcja ciągła $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest mierzalna.
b) Uzasadnić, że jeśli zbiór punktów nieciągłości funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma miarę zero, to funkcja f jest mierzalna.

A.51. Funkcje $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ są mierzalne [w szczególności w X mamy pewne σ-ciało $\mathcal{F}$; $n \in \mathbb{N}$]. Uzasadnić, że zbiory

$$
\begin{aligned}
A &= \{x \in X : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0\},\\
B &= \{x \in X : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\},\\
C &= \{x \in X : \text{ ciąg } (f_n(x))_{n\geqslant 1} \text{ jest zbieżny i granica jest liczbą wymierną}\},\\
D &= \{x \in X : \text{ ciąg } (f_n(x))_{n\geqslant 1} \text{ jest zbieżny i granica jest liczbą niewymierną}\},\\
E &= \{x \in X : \text{ ciąg } (f_n(x))_{n\geqslant 1} \text{ jest zbieżny (do granicy właściwej)}\}
\end{aligned}
$$

są mierzalne.

A.52. a) Uzasadnić starannie, że jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest mierzalna, to jej wykres $\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ jest mierzalnym podzbiorem płaszczyzny i że jego dwuwymiarowa miara Lebesgue'a wynosi zero.
b) Załóżmy, że wykres [pewnej] funkcji $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest mierzalnym podzbiorem płaszczyzny [poza tym o g nie zakładamy nic więcej]. Wykazać, że $\lambda_2(\{(x, g(x)) : x \in \mathbb{R}\}) = 0$.
Wskazówka do b). Może warto spojrzeć na wykresy funkcji $x \mapsto g(x) + c$.
Uwaga. Jeśli funkcja $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest niemierzalna, to może się zdarzyć, że jej wykres jest niemierzalnym podzbiorem płaszczyzny i jego [dwuwymiarowa] miara *zewnętrzna* Lebesgue'a jest dodatnia.

B. Całki

Umowa. W tym dziale przyjmujemy, że

$$0 \cdot (+\infty) = 0 = (+\infty) \cdot 0.$$

(Pozostałe działania z symbolami $\pm\infty$ zgodnie ze zdrowym rozsądkiem, uważamy na symbole nieoznaczone).

Komentarz. Całka z funkcji stałej, tożsamościowo równej 0, ma być równa 0 (nawet jeśli całkujemy po dużym zbiorze o mierze nieskończonej). Różne funkcje, które będziemy całkować, będą określone tylko prawie wszędzie, tzn. wszędzie poza pewnym zbiorem miary zero, i to ma nie wpływać ani na to, czy można je całkować, ani na wartość całki. (W szczególności na zbiorze miary zero można sobie zmienić wartości funkcji, nawet na $+\infty$, i to nic nie będzie zmieniać (por. zadanie A.12)).

Komentarz. Proszę zwrócić uwagę, że jeśli w założeniach zadania/twierdzenia pojawia się jakieś odwołanie do wartości funkcji w punktach (np. nieujemność [funkcji], zbieżność punktowa [ciągu funkcji]), a w tezie jakieś stwierdzenie o całkach, to równie dobrze można zakładać, że własność z założenia zachodzi „tylko" prawie wszędzie, tj. wszędzie poza pewnym zbiorem miary zero.

Jeśli w założeniach zadania/twierdzenia pojawia się jakieś odwołanie do wartości całek (np. typu nieujemność, skończoność [całki/całek]), a w tezie jakieś stwierdzenie o punktowych wartościach funkcji, to własność z tezy zachodzi *prawie wszędzie*, tj. wszędzie poza pewnym zbiorem miary zero.

Materiał do omówienia na zajęciach

Teoria. Funkcje proste. Przybliżanie nieujemnych funkcji mierzalnych. Funkcje schodkowe (na $\mathbb{R}^k$, przedziały). Całka z funkcji nieujemnej. Własności (m.in. monotoniczność, liniowość).

○ **B.1.** Załóżmy, że μ jest miarą na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, taką że $\mu(\mathbb{R} \setminus [0,1]) = 0$ oraz

$$\begin{aligned}
&\mu([0,1]) = 1,\\
&\mu([0,1/3]) = \mu([2/3,1]) = 1/2,\\
&\mu([0,1/9]) = \mu([2/9,1/3]) = \mu([2/3,7/9]) = \mu([8/9,1]) = 1/4 \quad \text{itd.},
\end{aligned}$$

tzn. jeśli $[a,b]$ jest jednym z 2^n odcinków długości $1/3^n$, które widzimy na n-tym etapie konstrukcji zbioru Cantora, to $\mu([a,b]) = 1/2^n$. Obliczyć

$$\int_{\mathbb{R}} x d\mu(x).$$

• **B.2** (nierówność Czebyszewa itp.). Dana jest przestrzeń z miarą $(X, \mathcal{F}, \mu)$.
a) Wykazać, że jeśli funkcja mierzalna $f\colon X \to [0,\infty)$ jest nieujemna [lub: $f\colon X \to \mathbb{R}$ spełnia μ-p.w. $f \geqslant 0$, tzn. $\mu(\{x \in X : f(x) < 0\}) = 0$], to

$$\mu\big(\{x \in X : f(x) \geqslant t\}\big) \leqslant \frac{\int_X f d\mu}{t} \qquad \text{dla } t > 0.$$

b) Wywnioskować, że dla dowolnej funkcji mierzalnej $f\colon X \to \mathbb{R}$ zachodzi

$$\mu\big(\{x \in X : |f(x)| \geqslant t\}\big) \leqslant \frac{\int_X f^2 d\mu}{t^2} \qquad \text{dla } t > 0,$$
$$\mu\big(\{x \in X : f(x) \geqslant t\}\big) \leqslant \frac{\int_X e^{\lambda f} d\mu}{e^{\lambda t}} \qquad \text{dla } t \in \mathbb{R}, \lambda > 0.$$

Teoria. Dla funkcji *nieujemnych*: tw. o zbieżności monotonicznej [tw. Lebesgue'a–Leviego], lemat Fatou.

Teoria. Całka z funkcji dowolnej. Własności (m.in. liniowość, monotoniczność, nierówność trójkąta). [Związki z całką Riemanna patrz uwaga na str. 62].

Teoria. Dla dowolnych funkcji: tw. Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej.

• **B.3.** Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty (1 + x^{2n})^{-1/n} dx.$$

• **B.4.** a) Zgadnąć, ile wynosi granica

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx,$$

a następnie uzasadnić, że zgadnięty wynik jest poprawny.
b) Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} e^{-2x} dx.$$

• **B.5.** Obliczyć następujące granice:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 n(e^{x/n} - 1)\frac{dx}{1 + x^4},$$
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n n(e^{x/n} - 1)\frac{dx}{1 + x^4},$$
$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{2n} n^3(e^{x/n} - 1)\frac{dx}{1 + x^4}.$$

○ **B.6.** a) Załóżmy, że $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna (na końcach przedziału pochodne jednostronne) oraz istnieje $M \in [0,\infty)$, takie że dla każdego $x \in [a,b]$ zachodzi $|f'(x)| \leqslant M$. Wykazać, że wówczas

$$\int_{[a,b]} f'(x) d\lambda_1(x) = f(b) - f(a) \qquad \text{[całka względem miary Lebesgue'a].}$$

b) Podać przykład, że teza nie musi zachodzić, jeśli f nie jest różniczkowalna w choćby jednym punkcie. Jakie założenie wystarczy dodać, żeby teza była nadal prawdziwa?

c) Podać przykład pokazujący, że teza nie musi zachodzić, jeśli pochodna f' istnieje prawie wszędzie (nawet jeśli założymy dodatkowo, że f jest jednostajnie ciągła).

Uwaga (funkcje jednej zmiennej: całka Riemanna vs. całka Lebesgue'a)**.** Zachodzą następujące fakty:

- wiadomo, że $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna [na $[a,b]$] wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczona, a zbiór jej punktów nieciągłości ma miarę [Lebesgue'a] zero;
  - w szczególności funkcje całkowalne w sensie Riemanna są mierzalne;
  - jeśli $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna, to jest też całkowalna względem miary Lebesgue'a i obie całki są równe [bo odpowiednie sumy dolne/górne są zbieżne];
  - istnieją funkcje całkowalne względem miary Lebesgue'a, dla których nie istnieje całka Riemanna, np. $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$,
- jeśli $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna [wszędzie (!) na (a,b) i ma powiedzmy pochodne jednostronne na krańcach], to $\int_a^b f'(x)d\lambda_1(x) = f(b) - f(a)$;
  - jeśli $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna prawie wszędzie, to nie musi tak być, nawet jeśli f jest ciągła;
- na AM 1 całki niewłaściwe po przedziałach $[a,b)$, w tym po półprostych, np. $[0,\infty)$, są zdefiniowane jako granice całek [Riemanna lub Newtona–Leibniza] po przedziałach zwartych; całka względem miary Lebesgue'a po $[a,b)$ czy $[0,\infty)$ jest czymś innym (patrzymy od razu na całą dziedzinę); w szczególności ze zbieżności całki niewłaściwej [w sensie AM 1] nie wynika całkowalność [względem miary Lebesgue'a];
  - jeśli jednak f jest nieujemna lub wiadomo, że jest całkowalna [względem miary Lebesgue'a] i f jest na tyle porządna, by można było mówić o całce niewłaściwej [w sensie AM 1], to obie całki istnieją i są równe.

○ **B.7** (całki z parametrem)**.** Dana jest przestrzeń z miarą $(X, \mathcal{F}, \mu)$, przedział $J \subset \mathbb{R}$ i funkcja $f\colon X \times J \to \mathbb{R}$, taka że dla każdego $t \in J$ funkcja $x \mapsto f(x,t)$ jest całkowalna na X. Definiujemy

$$\varphi(t) = \int_X f(x,t)d\mu(x) \qquad \text{dla } t \in J.$$

a) Załóżmy, że dla każdego $x \in X$ funkcja $t \mapsto f(x,t)$ jest ciągła oraz istnieje funkcja całkowana $g\colon X \to [0,\infty)$, taka że $|f(x,t)| \leqslant g(x)$ dla każdego $x \in X$. Wykazać, że funkcja φ jest ciągła.

b) Załóżmy, że dla każdego $x \in X$ funkcja $t \mapsto f(x,t)$ ma pochodną [wszędzie] oraz istnieje funkcja całkowalna $h\colon X \to [0,\infty)$, taka że $|\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)| \leqslant h(x)$ dla każdego $x \in X$. Wykazać, że

$$\varphi'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)d\mu(x).$$

- **B.8.** Obliczyć
$$\int_0^{\pi/2} \ln(1+\cos^2(x))dx.$$
Wskazówka. Całki z parametrem.

***

Teoria. Twierdzenie Fubiniego (na tym wykładzie tylko dla miary Lebesgue'a, w $\mathbb{R}^{k+l}$, ale patrz zadanie B.39).

Teoria. Twierdzenie o zamianie zmiennych (w $\mathbb{R}^k$).

- **B.9.** Niech $p, q > 1$ i niech A będzie zwartym podzbiorem $\mathbb{R}^2$ ograniczonym przez krzywe $y = x^2$, $y = x^3$. Obliczyć
$$\int_A x^{p-1}y^{q-1}d\lambda_2(x,y).$$

- **B.10.** Znaleźć wartości całek (lub uzasadnić, że podane funkcje nie sa całkowalne).
$$\int_{(0,1)^2} \frac{x-y}{x^2+y^2}d\lambda_2(x,y), \qquad \int_{(0,1)^2} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}d\lambda_2(x,y).$$

- **B.11.** Zbiór $A \subset [0,1]$ jest mierzalny. Niech $f(x) = \lambda_1(A \cap [0,x])$ dla $x \in [0,1]$. Obliczyć
$$\int_A f(x)dx.$$

- **B.12.** Niech $A \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem ograniczonym prostymi $y = x+1$ i $y = x-1$. Obliczyć
$$\int_A e^{-|x+y|}d\lambda_2(x.y).$$

- **B.13.** Znaleźć miarę zbioru $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2)^2 < 4(x^2-y^2)\}$.

Teoria. Środki ciężkości, reguła Pappusa–Guldina, zasady Cavalieriego itp.

- **B.14.** Znaleźć środek ciężkości półkuli $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < R^2, z > 0\}$.

***

Teoria. Przestrzeń L^1. Przestrzeń L^p.

Teoria. Splot.

Zadania treningowe, uzupełniające, dodatkowe

B.15. Załóżmy, że μ jest miarą na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, taką że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $\mu\big([n^2, (n+1)^2)\big) = 1/2^n$. Wykazać, że

$$2 \leqslant \int_{[1,\infty)} \sqrt{x}\, d\mu(x) < 3.$$

∘ **B.16.** a) Dana jest przestrzeń z miarą $(X, \mathcal{F}, \mu)$, taka że $\mu(X) < \infty$. Załóżmy, że funkcja $f\colon X \to \mathbb{R}$ jest mierzalna. Uzasadnić, że jeśli dla pewnego $p \in [1, \infty)$ zachodzi

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty,$$

to

$$\int_X |f|^q d\mu < \infty \qquad \text{dla dowolnego } q \in [1, p].$$

b) Podać przykład funkcji mierzalnej $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, takiej że

$$\int_{\mathbb{R}} f^2 d\lambda_1 < \infty, \qquad \text{ale} \qquad \int_{\mathbb{R}} |f| d\lambda_1 = +\infty.$$

c) Patrz zadanie B.27.

B.17 (ciekawsze, dla chętnych)**.** Dana jest przestrzeń z miarą $(X, \mathcal{F}, \mu)$, taka że $\mu(X) = 1$. Załóżmy, że funkcja mierzalna $f\colon X \to [0, \infty)$ jest nieujemna i $\int_X f^2 d\mu \in (0, \infty)$ [tzn. funkcja f^2 jest całkowalna i f nie jest równa zero p.w.]. Wykazać, że dla każdego $\theta \in [0, 1]$,

$$\mu\big(\{x \in X : f(x) > \theta \textstyle\int_X f d\mu\}\big) \geqslant \frac{(1-\theta)^2 (\int_X f d\mu)^2}{\int_X f^2 d\mu}.$$

Motywcja i wskazówka. Nierówność Czebyszewa (zadanie B.2) pozwala szacować z góry miarę zbioru, gdzie funkcja f jest „duża” [jeśli umiemy kontrolować całkę z f]. Ta nierówność pozwala [przy pewnych założeniach] szacować miarę zbioru, gdzie funkcja f jest „duża”, z dołu.

B.18 (z cyklu: ważne przykłady)**.** Podać przykład świadczący o tym, że w lemacie Fatou nierówność może być ostra.

B.19 (z cyklu: ważne przykłady)**.** Podać przykład nieujemnych funkcji mierzalnych $f_n\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$, zbieżnych punktowo do funkcji $f\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ [wszędzie], takich że [wszędzie]

$$f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant f \geqslant 0,$$

ale

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda_1 \neq \int_{\mathbb{R}} f d\lambda_1.$$

∘ **B.20** (sic)**.** Wykazać, że w twierdzeniu o zbieżności monotonicznej założenie o monotoniczności jest zbędne: Załóżmy, że nieujemne funkcje mierzalne $f_n\colon X \to [0,\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, są zbieżne punktowo do $f\colon X \to [0,\infty]$ i dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $f_n \leqslant f$. Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Uwaga. Nie zakładamy, że funkcja f jest całkowalna.

B.21. Obliczyć

$$\int_0^1 \big(x\lfloor 1/x\rfloor + x - 1\big)\lfloor 1/x\rfloor dx$$

[całka względem jednowymiarowej miary Lebesgue'a].

B.22. Dany jest ciąg $(a_n)_{n=1}^\infty$, taki że $a_n \in [0,1]$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Funkcja $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2\sqrt{|x-a_n|}}$$

[dla $x \in \{a_1, a_2, \dots\}$ kładziemy cokolwiek lub nie definiujemy f w tych punktach]. Rozstrzygnąć, czy funkcja f jest całkowana na $[0,1]$ [i czy zależy to od wyboru ciągu $(a_n)_{n=1}^\infty$].

∘ **B.23** (arcyważne, szczególnie na RP)**.** a) Załóżmy, że $(X, \mathcal{F}, \mu)$ jest przestrzenią z miarą [niekoniecznie skończoną], zaś $g\colon X \to [0,\infty]$ jest nieujemną funkcją mierzalną [niekoniecznie całkowalną]. Niech

$$\nu(A) := \int_A g d\mu \quad \text{dla } A \in \mathcal{F}.$$

Wykazać lub sprawdzić lub uświadomić sobie, że $\nu : \mathcal{F} \to [0,\infty]$ jest miarą na $(X, \mathcal{F})$.

Uwaga. To prawie na pewno było w jakiejś postaci dowodzone na wykładzie, ale warto to jeszcze raz przemyśleć – w szczególności, jeśli było już twierdzenie o zbieżności monotonicznej, to dowód jest natychmiastowy (ale sam fakt można wykazać też niezależnie od niego).

b) Wykazać ponadto, że jeśli funkcja $f\colon X \to [0,\infty]$ jest mierzalna, to

$$\int_X f d\nu = \int f g d\mu.$$

Uwaga i plan pracy. To być może też było w jakiejś postaci dowodzone na wykładzie, ale warto to jeszcze raz przemyśleć – wystarczy sprawdzić dla indykatorów: $f = \mathbf{1}_A$, $X \in \mathcal{F}$ (dlaczego?).

∘ **B.24** (arcyważne, m.in. na RP i na AM przy mierze rozmaitościach)**.** Dana jest przestrzeń z miarą $(X, \mathcal{F}, \mu)$ oraz pewne przekształcenie $T\colon X \to Y$. Niech

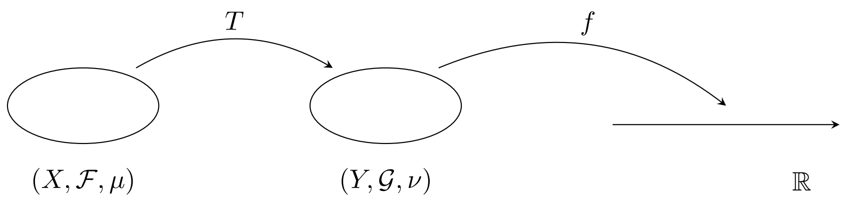
$$\mathcal{G} := \{B \subset Y : T^{-1}(B) \in \mathcal{F}\},$$

$$\nu(B) \coloneqq \mu(T^{-1}(B)) \quad \text{dla } B \in \mathcal{G}$$

(patrz Rysunek B.1). Sprawdzić, że $\mathcal{G}$ jest σ-ciałem [w Y], zaś $\nu\colon \mathcal{G} \to [0, +\infty]$ jest miarą. Wykazać ponadto, że jeśli funkcja $f\colon Y \to [0, \infty]$ jest mierzalna [względem σ-ciała $\mathcal{G}$], to

$$\int_X f \circ T d\mu = \int_Y f d\nu.$$

Czy jeśli f jest całkowalna (ale niekoniecznie nieujemna), to teza nadal zachodzi?



Rysunek B.1.: Zadanie B.24: za pomocą przekształcenia T transportujemy miarę μ z X do Y. Zamiast całkować funkcję f po Y [względem miary ν] możemy całkować funkcję $f \circ T$ po X [względem wyjściowej miary μ].

B.25. Dana jest przestrzeń z miarą $(X, \mathcal{F}, \mu)$. Wszędzie poniżej zakładamy, że funkcje $f_n\colon X \to [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$, są *nieujemne* i mierzalne (reszta założeń w zależności od podpunktu).

a) Wykazać, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny prawie wszędzie (i w szczególności $f_n \to 0$ p.w.).

b) Wykazać, że jeśli $\int_X f_n d\mu \to 0$ dla $n \to \infty$, to ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ posiada podciąg zbieżny do zera prawie wszędzie.

c) Wykazać, że jeśli $\int_X f_n^2 d\mu \leqslant 5$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to $\frac{1}{n} f_n \to 0$ prawie wszędzie. Rozstrzygnąć, czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f_n$ musi być zbieżny prawie wszędzie.

B.26 (z cyklu: ważne przykłady)**.** a) Podać przykład funkcji ciągłych $f_n\colon [0,1] \to [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, takich że $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0$, ale ciąg $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ nie jest zbieżny dla żadnego $x \in [0,1]$.

b) Podać przykład funkcji ciągłych $g_n\colon [0,1] \to [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$, takich że dla każdego $x \in [0,1]$ zachodzi $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$, ale $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)dx = +\infty$.

B.27 (c.d. zadania B.16)**.** Dana jest przestrzeń z miarą $(X, \mathcal{F}, \mu)$, taka że $\mu(X) < \infty$. Ustalmy funkcję mierzalną $f\colon X \to \mathbb{R}$. Niech

$$J = \{p \in [1, \infty) : \int_X |f|^p d\mu < \infty\},$$

$$\|f\|_p \coloneqq \Big(\int_X |f|^p d\mu\Big)^{1/p} \quad \text{dla } p \in J.$$

Z zadania B.16 wynika, że zbiór J jest przedziałem [być może nieskończonym lub pustym). Udowodnić, że $\|f\|_p$ jest ciągłą funkcją zmiennej $p \in J$.

B.28 (trudniejsze)**.** Dana jest przestrzeń z miarą $(X, \mathcal{F}, \mu)$, taka że $\mu(X) = 1$, liczba nieparzysta n oraz zbiory $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ spełniające $\mu(A_i) \geqslant 1/2$ dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$. Wykazać, że istnieją $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, takie że $\mu(A_i \cap A_j) \geqslant \frac{n-1}{4n}$.

B.29. Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest mierzalna i spełnia

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)^2(1 + x^2)d\lambda_1(x) < \infty.$$

Wykazać, że f jest całkowalna na $\mathbb{R}$ (względem miary λ_1).

B.30. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_1^\infty \frac{dx}{x^2 \ln(1 + x/n)}, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{\ln(x^2 + 2^n)}{nx^2} dx.$$

B.31. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{dx}{n + n^2 \sin(x/n^2)}.$$

W ramach autosprawdzenia. Odpowiedź należy oczywiście starannie uzasadnić (nie wychodzi 0).

B.32. a) Zgadnąć, ile wynosi granica

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2} dx,$$

a następnie sprawdzić, czy odgadnięty wynik jest poprawny.

b) Rozstrzygnąć, czy istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{2n} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2} dx.$$

Jeśli tak, to obliczyć ją, a jeśli nie, to znaleźć

$$\limsup_{n\to\infty} \int_n^{2n} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2} dx.$$

[Wszystkie odpowiedzi bardzo starannie uzasadnić.]

B.33. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{(\sin x + \cos x)^n}{1 + (\sin x + \cos x)^{2n}} \exp(-x - \sin x - \cos x) dx$$

B.34. Funkcja $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ jest ciągła i ograniczona. Obliczyć granicę

$$\lim_{\delta\to 0^+} \int_0^\infty \frac{\delta f(x)}{\delta^2 + x^2} dx.$$

B.35. Obliczyć wartość całki
$$\int_0^1 \frac{x^a - 1}{\ln x} dx$$
dla wszystkich $a \in \mathbb{R}$, dla których jest ona skończona.
Wskazówka. Różniczkować po parametrze.

B.36. Dane są liczby $0 < a < b$. Obliczyć
$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx.$$
Wskazówki. Można przestawić całki (jakie?), można próbować różniczkować względem czegoś (czego?). [Oczywiście należy uzasadnić legalność wykonywanych manewrów.]

B.37. Stosując [m.in.] twierdzenie Fubiniego i związek $\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xt} dt$ (dla $x > 0$) udowodnić, że
$$\lim_{A\to\infty} \int_0^A \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$
[Oczywiście uzasadnić wszystkie przejścia].

B.38 (σ-ciało produktowe)**.** Załóżmy, że mamy dwie przestrzenie wyposażone w σ-ciała: $(X, \mathcal{F})$, $(Y, \mathcal{G})$. W zbiorze $X \times Y$ wprowadzamy σ-ciało $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$, które jest generowane przez wszystkie „prostokąty mierzalne”:
$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} := \sigma\big(\{A \times B : A \in \mathcal{F},\ B \in \mathcal{G}\}\big).$$

a) Dla np. $X = Y = \mathbb{R}$ (z $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ będącym np. σ-ciałem zbiorów borelowskich na prostej lub mierzalnych w sensie Lebesgue'a) podać przykład możliwie prostego zbioru $C \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$, który nie jest postaci produktowej $A \times B$.

b) Wykazać, że jeśli $C \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$, to dla każdego $x \in X$ zbiór
$$C_x := \{y \in Y : (x, y) \in C\} \qquad (x\text{-przekrój zbioru } C)$$
jest mierzalnym podzbiorem Y (należy do $\mathcal{G}$).

b') Wykazać, że jeśli $C \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$, to dla każdego $y \in Y$ zbiór
$$C^y := \{x \in X : (x, y) \in C\} \qquad (y\text{-przekrój zbioru } C)$$
jest mierzalnym podzbiorem X (należy do $\mathcal{F}$).

c) Niech $\mathcal{L}_k$ oznacza σ-ciało zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a w $\mathbb{R}^k$. Podać przykład zbioru $C \subset \mathbb{R}^2$, takiego że $C \in \mathcal{L}_2$, ale $C \notin \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_1$.

d) Wykazać, że dla σ-ciał zbiorów borelowskich zachodzi
$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^l).$$

d*) Wykazać, że równość $\mathcal{B}(X \times Y) = \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$ zachodzi przy założeniu, że przestrzenie X, Y są polskie, tj. metryczne, ośrodkowe i zupełne. [W $X \times Y$ rozpatrujemy oczywiście topologię produktową].

e) Wykazać, że jeśli mamy trzy przestrzenie wyposażone w σ-ciała: $(X_1, \mathcal{F}_1)$, $(X_2, \mathcal{F}_2)$, $(X_3, \mathcal{F}_3)$, to

$$\big(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2\big) \otimes \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_1 \otimes \big(\mathcal{F}_2 \otimes \mathcal{F}_3\big) = \sigma\big(\{A_1 \times A_2 \times A_3 : A_1 \in \mathcal{F}_1,\ A_2 \in \mathcal{F}_2,\ A_3 \in \mathcal{F}_3\}\big)$$

(więc w szczególności można pisać po prostu $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \mathcal{F}_3$).

B.39 (ogólne twierdzenie Fubiniego)**.** *Notacja.* Załóżmy, że mamy dwie przestrzenie mierzalne $(X, \mathcal{F}, \mu)$, $(Y, \mathcal{G}, \nu)$. Załóżmy również [na razie, głównie dla wygody], że miary μ, ν są probabilistyczne: $\mu(X) = 1 = \nu(Y)$. W zbiorze $X \times Y$ wprowadzamy σ-ciało $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$, które jest generowane przez wszystkie „prostokąty mierzalne" (patrz zadanie B.38).

Plan. Wykażemy najpierw kilka lematów o mierzalności, potem twierdzenie o istnieniu miary produktowej, a potem twierdzenie Fubiniego.

a) Wykazać, że jeśli funkcja $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ jest mierzalna [względem σ-ciała produktowego $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$], to dla każdego $x \in X$ funkcja $f_x\colon Y \to \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem

$$f_x(y) \coloneqq f(x, y) \qquad \text{dla } y \in Y,$$

jest mierzalna [względem σ-ciała $\mathcal{G}$].

a') Wykazać, że jeśli funkcja $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ jest mierzalna [względem σ-ciała produktowego $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$], to dla każdego $Y \in Y$ funkcja $f^y\colon X \to \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem

$$f^y(x) \coloneqq f(x, y) \qquad \text{dla } x \in X,$$

jest mierzalna [względem σ-ciała $\mathcal{F}$].

b) Wykazać, że jeśli funkcja $f\colon X \times Y \to [0, \infty)$ jest mierzalna [względem σ-ciała produktowego $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$] i nieujemna, to funkcja zdefiniowana wzorem

$$X \ni x \mapsto \int_Y f_x(y) d\nu(y)$$

jest mierzalna [względem σ-ciała $\mathcal{F}$].

b') Wykazać, że jeśli funkcja $f\colon X \times Y \to [0, \infty)$ jest mierzalna [względem σ-ciała produktowego $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$] i nieujemna, to funkcja zdefiniowana wzorem

$$Y \ni y \mapsto \int_X f^y(X) d\mu(x)$$

jest mierzalna [względem σ-ciała $\mathcal{G}$].

c) Wykazać, że miara $\pi\colon \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \to [0, 1]$ zdefiniowana na σ-ciele $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ wzorem

$$\pi(C) \coloneqq \int_X \Big[\int_Y \mathbf{1}_{C_x}(y) d\nu(y)\Big] d\mu(x)$$

jest jedyną miarą probabilistyczną spełniającą warunek:

$$\pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \qquad \text{dla } A \in \mathcal{F},\ B \in \mathcal{G}.$$

[W szczególności zrozumieć, że z poprzednich podpunktów i z zadania B.38, w którym zostały zdefiniowane przekroje C_x, wynika, że definicja π ma sens]. Wykazać również, że dla $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ zachodzi

$$\pi(C) := \int_Y \Big[\int_X \mathbf{1}_{C^y}(x) d\mu(x)\Big] d\nu(y).$$

Używa się oznaczenia $\pi = \mu \otimes \nu$.

e) Wykazać twierdzenie Fubiniego dla funkcji nieujemnych: jeśli funkcja $f\colon X \times Y \to [0, \infty)$ jest mierzalna [względem σ-ciała produktowego $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$] i nieujemna, to

$$\int_{X\times Y} f(x,y) d(\mu \otimes \nu)(x,y) = \int_X \Big[\int_Y f(x,y) d\nu(y)\Big] d\mu(x) \tag{B.1}$$

$$= \int_Y \Big[\int_X f(x,y) d\mu(x)\Big] d\nu(y). \tag{B.2}$$

[W szczególności zrozumieć, że z poprzednich podpunktów wynika, że te napisy mają sens.]

f) Wykazać twierdzenie Fubiniego dla funkcji całkowalnych: jeśli funkcja $f\colon X \times Y \to [0, \infty)$ jest całkowalna [względem miary produktowej $\mu \times \nu$ (w szczególności mierzalna względem σ-ciała produktowego $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$)], tzn.

$$\int_{X\times Y} |f(x,y)| d(\mu \otimes \nu)(x,y) < \infty,$$

to

$$\mu\big(\{x \in X : \int_Y |f(x,y)| d\nu(y) < \infty\}\big) = 1,$$
$$\nu\big(\{y \in Y : \int_X |f(x,y)| d\mu(x) < \infty\}\big) = 1,$$

oraz zachodzą równości (B.1), (B.2).

B.40. Obliczyć objętość części wspólnej dwóch walców o promieniach 1 i prostopadłych osiach.

B.41. Obliczyć całki (np. stosując twierdzenie Fubiniego):

$$\int_A x e^{-y^2} d\lambda_2(x,y) \qquad \text{dla } A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x+y| \leqslant 1,\ y > 0\},$$

$$\int_B \frac{x\, d\lambda_3(x,y,z)}{1+(xyz)^4} \qquad \text{dla } B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0,\ \ y > 1,\ z > 1\},$$

$$\int_C \frac{d\lambda_3(x,y,z)}{(x+y+1)^2} \qquad \text{dla } C = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1,\ 0 < x+y < 1,\ 0 < z(x+y+1) < 1\big\}.$$

W ramach autosprawdzenia. Wśród odpowiedzi jest: jedna liczba ujemna, jedna liczba niewymierna, jedna liczba całkowita.

B.42. Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest całkowalna [względem jednowymiarowej miary Lebesgue'a]. Określamy

$$\varphi(y) := \int_y^{y+1} f(x)dx \quad \text{dla } y \in \mathbb{R}.$$

Uzasadnić, że funkcja φ jest dobrze zdefiniowana, całkowalna oraz

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)dy = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx.$$

B.43. Obliczyć objętość bryły

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 < 4,\ x > 0,\ x^2 > z > 0\}.$$

Wskazówka (?). Oczywiście warto spróbować sobie wyobrazić, jak ta bryła wygląda, ale nie jest to potrzebne do zrobienie zadania.
W ramach autosprawdzenia. Wychodzi mniej niż 4/5.

B.44 (egzamin 2007)**.** Dane są zbiory mierzalne $A, B \subset [0, 1]$. Niech $f(x) = \lambda_1(A \cap [0, x])$, $g(x) = \lambda_1(B \cap [0, x])$ dla $x \in [0, 1]$. Obliczyć

$$\int_B f d\lambda_1 + \int_A g d\lambda_1.$$

B.45. Fragmenty następujących powierzchni:

$$2xy = 1, \quad xy = 2, \quad y = 2x, \quad x = 2y, \quad z = 0, \quad yz = 1 \qquad [x, y > 0],$$

dzielą zbiór $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0,\ y > 0\}$ na kilka obszarów. Jeden z tych obszarów jest ograniczony – obliczyć jego objętość.

B.46. Obliczyć wartość średnią[1] funkcji $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ na zbiorze

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < x + y + z\}.$$

W ramach autosprawdzenia. Trzeba policzyć dwie całki, ich wartości to – w przybliżeniu, w kolejności rosnącej – ok. $2,72$ i $3,26$.

B.47. Dany jest kąt dwuścienny o rozwartości 2γ, $0 < \gamma < \pi/2$, którego krawędź przechodzi przez środek kuli [w $\mathbb{R}^3$] o promieniu 1. Niech C będzie częścią kuli zawartą w tym kącie dwuściennym. Obliczyć odległość środka ciężkości zbioru C od krawędzi kąta.

B.48. Niech $L\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ będzie przekształceniem liniowym nieosobliwym i niech $E \subset \mathbb{R}^k$ będzie zbiorem mierzalnym ograniczonym. Wykazać, że obrazem [w odwzorowaniu L] środka ciężkości zbioru E jest środek ciężkości zbioru $L(E)$ [obrazu zbioru E].

[1] Tzn. $\frac{1}{\lambda_3(A)} \int_A f d\lambda_3$.

B.49. Niech $A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{-2x, x-1\} < y < \min\{1-2x, x+1\}\big\}$. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \Big(\frac{2x+y+n}{n}\Big)^n dxdy.$$

[Odpowiedź oczywiście starannie uzasadnić].

B.50 (egzamin 2011/12)**.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-2\pi n}^{2\pi n} \big(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!}\big) \cos\big(\frac{x}{\sqrt{n}}\big) \exp(-2x^2) dx.$$

B.51. Niech $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2+z^2} < z^{1/3}\}$. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \frac{\exp(x^2+y^2+z^2)}{n \sin(\frac{1}{n}\sqrt{x^2+y^2+z^2})} d\lambda_3(x,y,z).$$

[Oczywiście starannie uzasadnić wszystkie kroki].
W ramach autosprawdzenia. Wychodzi więcej niż $9/4$.

B.52 (całkiem fajne)**.** Niech $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < x^{1/3}\}$. W zależności od wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ obliczyć całkę

$$\int_A x^p d\lambda_3(x,y,z).$$

Uwagi. Czasem wyjdzie $+\infty$. Na pewno można od razu podstawiać sferycznie w $\mathbb{R}^3$. A może da się zrobić nieco sprytniej?

B.53. Obliczyć całkę

$$\iiiint\limits_{t^2+2x^2+3y^2+4y^2<1} \frac{t^2\, dtdxdydz}{t^2+2x^2+3y^2+4y^2}.$$

W ramach autosprawdzenia. Wychodzi więcej niż $1/4$.

B.54. Obliczyć miarę zbioru

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x>0,\ y>0,\ z>0,\ xy<z,\ x^4+z^4<x^2z\}.$$

B.55. Dla jakich par wykładników $p,q>0$ funkcja $f(x) = \|x\|_2^{-p}(1-\|x\|_2)^{-q}$, $x \in \mathbb{R}^k$, jest całkowalna po kuli $B = \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\|_2 < 1\}$?

B.56. W przestrzeni $\mathbb{R}^k$ rozważamy podprzestrzeń „równikową"

$$H = \{(x_1,\ldots,x_k) \in \mathbb{R}^k : x_k = 0\}$$

[która jest izomorficzna i izometryczna z $\mathbb{R}^{k-1}$]. Niech C będzie stożkiem, którego podstawą jest zbiór $B \subset H$ (ograniczony i mierzalny względem $k-1$-wymiarowej miary Lebesgue'a), a wierzchołkiem punkt leżący w odległości h od H. W jakiej odległości od H leży środek ciężkości zbioru C?

B.57. Niech $A \subset \mathbb{R}^3$ będzie zbiorem mierzalnym, ograniczonym, leżącym w półprzestrzeni $z > 0$. Niech $m := \lambda_3(A)$ i niech (a, b, c) będzie środkiem ciężkości zbioru A. Dane są liczby $0 < \alpha < \beta$. Dla $t > 0$ niech $f(t)$ oznacza miarę części zbioru A zawartej pomiędzy płaszczyznami o równaniach $z = \alpha t$ i $z = \beta t$. Obliczyć całkę

$$\int_0^\infty f(t)dt,$$

tj. wyrazić ją przez wielkości dane.

B.58. Jeśli funkcja $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ jest całkowalna, to definiujemy funkcję $\mathcal{L}(f)\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ wzorem

$$\mathcal{L}(f)(x) := \int_0^\infty f(t)e^{-tx}dt \qquad \text{dla } x \in [0, \infty).$$

a) Uzasadnić, że to poprawna definicja.

b) Udowodnić, że jeśli funkcja f jest całkowalna, to funkcja $\mathcal{L}(f)$ jest klasy C^∞.

c) Udowodnić, że jeśli funkcje $f, g\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sa całkowalne, to wówczas funkcja $f * g\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x - t)g(t)dt \qquad \text{dla } x \in [0, \infty)$$

też jest całkowalna i dla każdego $x \in [0, \infty)$ zachodzi równość

$$\mathcal{L}(f * g)(x) = \mathcal{L}(f)(x) \cdot \mathcal{L}(g)(x).$$

Uwaga. W pewnym momencie na zajęciach pojawią się sploty i wtedy podpunkt c) stanie się pewnie łatwiejszy (ale można go robić wcześniej).