

WSTĘP DO KRZYWYCH ALGEBRAICZNYCH.

1. WPROWADZENIE

Definicja 1. *Krzywą algebraiczną* w \mathbb{C}^2 nazywamy zbiór $\{f(x, y) = 0\}$, gdzie f jest wielomianem, dla uproszczenia nierozkładalnym.

Definicja 2. *Stopniem* krzywej $C = \{f(x, y) = 0\}$ nazwiemy stopień wielomianu f .

Jeśli w jakimś punkcie $(x, y) \in C$ zachodzi $\nabla f \neq 0$, to na mocy twierdzenia o funkcji uwikłanej C jest gładka w tym punkcie. Jeśli zaś $\nabla f = 0$, punkt (x, y) jest *punktem osobliwym* krzywej. Krzywa algebraiczna ma jedynie izolowane punkty osobliwe.

∇f oznacza zespolony wektor $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$. Aby stosować twierdzenie o funkcji uwikłanej w kategorii zespolonej nie potrzeba wiele wysiłków. Możemy traktować f jako funkcję z \mathbb{R}^4 do \mathbb{R}^2 , gdzie napiszemy $x = x_R + ix_I$, $y = y_R + iy_I$ oraz $f = f_R + if_I$. Macierz pochodnych

$$\frac{\partial(f_R, f_I)}{\partial(x_R, x_I)}$$

jest równa zespolonej prezentacji macierzy $\frac{\partial f}{\partial x}$ (tzn. $a + bi = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$). W szczególności warunek $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$ jest równoważny niezdegenerowaniu macierzy $\frac{\partial(f_R, f_I)}{\partial(x_R, x_I)}$: jeśli ten warunek zachodzi, można lokalnie rozwikłać x_R, x_I jako funkcje y_R, y_I , czyli uzyskać funkcję $x(y)$. Nietrudno zauważyć, że pochodna funkcji (x_R, x_I) po (y_R, y_I) jest macierzą postaci $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, więc spełnione są równania Cauchy'ego–Riemanna i $x(y)$ jest holomorficzną. Krótko mówiąc, tam gdzie gradient zespolony nie znika, C jest gładką rozmaitością zespoloną.

Naszym celem w ogólności jest znalezienie niezmienników punktów osobliwych (klasyfikacja) i zbadanie, czy istnieje krzywa mająca zadane punkty osobliwe. Zanim do tego przejdziemy musimy przypomnieć sobie kilka podstawowych idei.

Pierwszą z nich jest uzwarcie. Wiele rzeczy się robi o wiele przyjemniej, gdy zbiory są zwarte. W naszym przypadku naturalnym uzwarceniem jest dwuwymiarowa przestrzeń rzutowa. Sama definicja jest kompletnie bezużyteczna w naszych zastosowaniach.

Definicja 3. Przestrzeń ilorazową $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ przy relacji równoważności $(x, y, z) \sim (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nazwiemy *dwuwymiarową* przestrzenią rzutową.

Dla nas przestrzeń $\mathbb{C}P^2$ będzie po prostu \mathbb{C}^2 zaklejona *prostą w nieskończoności*, czyli zbiorem $\mathbb{C}P^1 = S^2$. Jest to przestrzeń zwarta. Jako rozmaitość $\mathbb{C}P^2$ może być pokryta trzema kopiami \mathbb{C}^2 . Na jednej (podstawowej) będziemy mieli współrzędne (x, y) . Na drugiej, powiedzmy (u, v) , na trzeciej (u', v') . Przy czym, gdy $x \neq 0$ mamy

$$u = 1/x, \quad v = y/x.$$

oraz, gdy $y \neq 0$, to

$$u' = x/y, \quad v' = 1/y.$$

Prosta w nieskończoności jest zadana równaniem $u = 0$ w jednej mapie, zaś $v' = 0$ w drugiej.

Definicja 4. Prostą w nieskończoności będziemy oznaczali zbiorem L_∞ .

Definicja 5. Domknięcie C w $\mathbb{C}P^2$ nazwiemy po prostu *uzwarceniem* C i będziemy oznaczać przez \bar{C} . Zbiór $\bar{C} \setminus C = \bar{C} \cap L_\infty$ nazwiemy zbiorem punktów C w nieskończoności.

Naturalnym obiektem westchnień na $\mathbb{C}P^2$ są wielomiany jednorodne trzech zmiennych. To znaczy wielomiany $F(x, y, z)$, które są sumami jednomianów tego samego stopnia $\deg F$. Każdy taki wielomian zadaje wielomian dwóch zmiennych f wzorem

$$f(x, y) = F(x, y, 1).$$

Odwrotnie, mamy następujący lemat.

Lemat 1. Niech f będzie wielomianem dwóch zmiennych stopnia d . Wtedy istnieje taki wielomian $F(x, y, z)$, jednorodny stopnia d , że $f(x, y) = F(x, y, z)$. F nazywamy *ujednorodnieniem* f .

Zamiast dowodu wystarczy chyba przykład $f(x, y) = x^3 + xy + 1$, to $F(x, y, z) = x^3 + xyz + z^3$.

Możemy zauważyć, że wielomian jednorodny F zadaje funkcję na \mathbb{C}^3 o tej własności, że jeśli $F(x, y, z) = 0$ to $F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = 0$. Tak więc $Z_F = \{F = 0\}$ jest zamknięty ze względu na relację równoważności, więc “spuszcza” się do $\mathbb{C}P^2$.

Lemat 2. Niech $C = \{f(x, y) = 0\}$. Wtedy domknięcie C w $\mathbb{C}P^2$ zadane jest we współrzędnych (u, v) przez $\{F(1, v, u) = 0\}$, zaś we współrzędnych (u', v') przez $\{F(u', 1, v') = 0\}$.

Szkic dowodu. Zauważmy, że $F(1, y/x, 1/x) = x^{-d}F(x, y, 1) = x^{-d}f(x, y)$. To oznacza, że zbiory $\{F(x, y, 1) = 0\}$ i $\{F(1, v, u) = 0\}$ pokrywają się przy $x \neq 0$ i $u \neq 0$. Ale teraz łatwo widzieć, że $\{F(1, v, u) = 0\} \cap \{u \neq 0\}$ jest gęsty w $\{F(1, v, u) = 0\}$. \square

O krzywej C powiemy, że jest gładka w nieskończoności, jeśli jest gładka w każdym punkcie w nieskończoności. Powiemy, że jest regularna w nieskończoności, jeśli jej przecięcie z L_∞ jest transwersalne.

Przykład 1. Niech $f(x, y) = x$. Wtedy C jest zwykłą prostą $\{x = 0\}$. We współrzędnych (u, v) prosta jest zadana przez równanie $1 = 0$. We współrzędnych (u', v') przez $u' = 0$. Stąd punkt C w nieskończoności jest jeden $(u', v') = (0, 0)$ (prosta w nieskończoności ma równanie $\{v' = 0\}$). Czyli domknięcie C jest jednopunktowym uzwarceniem prostej zespolonej, a więc sferą Riemanna S^2 .

Poniższy dość ważny fakt jest nazywany twierdzeniem Bézout. W wersji “olimpijskiej” mówi, że dwa wielomiany dwóch zmiennych mają co najwyżej tyle pierwiastków, ile wynosi ich iloczyn stopni.

Twierdzenie 1. Niech C_1 i C_2 będą różnymi krzywymi w $\mathbb{C}P^2$ odpowiednio stopni d_1 i d_2 . Wtedy C_1 i C_2 przecinają się w co najwyżej $d_1 d_2$ punktach, przy czym tych punktów jest dokładnie $d_1 d_2$, jeśli tylko C_1 jest transwersalna do C_2 .

Dwie krzywe niekoniecznie gładkie nazwiemy transwersalnymi, jeśli przecinają się wyłącznie w punktach, gdzie obie są gładkie i to przecięcie jest transwersalne.

Przykład 2. Niech $C_1 = \{x = 0\}$ zaś $C_2 = \{x - 1 = 0\}$. Te dwie krzywe nie mają punktów wspólnych w \mathbb{C}^2 . We współrzędnych (u', v') C_1 zadana jest równaniem $\{u' = 0\}$, zaś $C_2 \{u' - v' = 0\}$. A więc C_1 przecina C_2 w punkcie $(0, 0)$, który leży na prostej w nieskończoności.

Jeśli $\bar{C} \subset \mathbb{C}P^2$ jest gładka, jest to zwarta, zorientowana powierzchnia. Dlatego warto przypomnieć kilka faktów o powierzchniach zwartych.

2. GLOBALNE NIEZMIENNIKI TOPOLOGICZNE

Niech S będzie zwartą, spójną, zorientowaną powierzchnią rzeczywistą bez brzegu.

Definicja 6 (Nieścisła). *Genusem* albo *rodzajem* S nazwiemy “liczbę rączek” S , to znaczy 0 dla sfery S^2 , 1 dla torusa, 2 dla dwuprecla itd.

Uwaga 1. ‘Krzywa’ i ‘powierzchnia’ są terminami często używanymi wymiennie. ‘Krzywa’ – bo ma wymiar zespolony 1, zaś powierzchnia, bo ma wymiar rzeczywisty 2. W pewnym sensie krzywa to jest powierzchnia z wybraną strukturą zespoloną.

Bardziej precyzyjna definicja to np. połowa wymiaru pierwszej grupy (ko)homologii. Jeśli χ jest jakkolwiek zdefiniowaną charakterystyką Eulera, to $g = 1 - \chi/2$.

Niezbyt trudne twierdzenie mówi, że dwie powierzchnie są dyfeomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy mają ten sam genus. Co więcej, jeśli S_1 nakrywa S_2 (czyli S_1 jest nakryciem rozgałęzionym nad S_2 , równoważnie istnieje przekształcenie z S_1 “na” S_2 , którego zbiór wartości krytycznych jest skończony, a przeciwobraz dowolnego punktu z S_2 jest skończony), to $g(S_1) \geq g(S_2)$. Równości być nie musi, na przykład torus nakrywa sferę S^2 stopniem 2 a nakrycie jest rozgałęzione w 3 punktach.

Definicja 7. Genusem $g(C)$ krzywej C w \mathbb{C}^2 nazwiemy genus jej uzwarcenia traktowanego jako powierzchnia Riemanna. Jak na razie genus jest określony tylko wtedy, gdy \bar{C} jest gładka.

Genus krzywej gładkiej jest ściśle powiązany z jej stopniem.

Twierdzenie 2 (Formuła na genus). Jeśli \bar{C} jest gładka stopnia d , to $g(C) = (d - 1)(d - 2)/2$.

W szczególności krzywe stopnia 1 i 2 są sferami, stopnia 3 jest torusem a stopnia 4 ma genus 3. W szczególności nie istnieje gładka krzywa algebraiczna w $\mathbb{C}P^2$ o genusie 2.

Dowody formuły na genus można znaleźć w książce Griffithsa–Harrisa. Najbardziej elementarny polega na wybraniu sobie punktu x nie należącego do C oraz prostej $L \subset \mathbb{C}P^2$ nie przechodzącej przez x . Następnie wykonujemy rzutowanie C na L z punktu x . To jest nakrycie rozgałęzione, łatwo zauważyć, że stopień rozgałęzienia wynosi d . Trudniej policzyć ilość punktów rozgałęzienia. Jest ich $d(d - 1)$ i odpowiadają prostym przechodzącym przez x stycznymi do C . Następnie formuła Riemanna–Hurwitza na genus kończy dowód twierdzenia.

W przypadku krzywych niegładkich, ale zwartych istnieje kilka różnych definicji genusu. My będziemy używać tak zwanego genusu geometrycznego, oznaczanego czasem w literaturze przez p_g .

Definicja 8. Niech $C \subset \mathbb{C}P^2$ będzie krzywą zwartą. *Genusem* C nazwiemy najmniejszy genus takiej gładkiej krzywej Σ , dla której istnieje nakrycie rozgałęzione $\Sigma \rightarrow C$.

Przedstawiciele starej szkoły matematyki mogą, za użycie słowa ‘genus’ chcieć spalić na stosie, bo to jest zaśmianie języka

Krzywo! Nakryj się!

Przykład 3. Krzywa C zadana równaniem $y^2 = x^3 + x^2$ jest niegładka w $(0, 0)$. Możemy ją sparametryzować przez $x = t^2 + 1$, $y = t^3 + t$. To oznacza, że istnieje odwzorowanie sfery S^2 na C (parametryzacja).

Piszemy tu równanie krzywej w \mathbb{C}^2 , ale myślimy o jej domknięciu w $\mathbb{C}P^2$

Definicja 9. Krzywa jest wymierna, jeśli jej genus wynosi 0.

Uwaga 2. Genus krzywej stopnia d jest równy co najwyżej $(d-1)(d-2)/2$. Równość ma miejsce wyłącznie dla krzywych gładkich.

Znamy z Analizy I wzory Eulera na całkowanie funkcji postaci $R(x, \sqrt{x^2 + ax + b})$. Tego typu całki załatwia się podstawieniem $x = x(t)$ takim, że $x(t)$ oraz $y = \sqrt{x^2 + ax + b}$ są funkcjami wymiernymi. Po takim podstawieniu całka sprowadza się do algorytmicznie wyliczalnej całki z funkcji wymiernej. Metoda pracuje, bo krzywa $y^2 = x^2 + ax + b$ jest krzywą wymierną, a więc istnieje jej parametryzacja z S^2 , a więc parametryzacja funkcjami wymiernymi.

Dla odmiany, w ogólności krzywa $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$ ma genus 1. W związku z tym nie da się zazwyczaj znaleźć takiego podstawienia, żeby całkę z funkcji postaci $R(x, \sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c})$ sprowadzić do całki z funkcji wymiernej.

Jest jeszcze jeden problem z całkami tego typu. Otóż całkę oznaczoną z funkcji $R(x, \sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c})$ można traktować jako całkę po krzywej $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$ z czegoś w stylu $R(x, y)dx$. Ponieważ genus krzywej jest dodatni, forma $R(x, y)dx$ nie musi być dokładna więc całka może zależeć od wyboru krzywej i w ogólności nie musi być dobrze określona.

Na zakończenie dyskusji o genusie, zdefiniujemy go dla krzywych "z dziurami".

Definicja 10. Niech $C \subset \mathbb{C}P^2$ będzie krzywą. *Genusem* C nazwiemy genus jej domknięcia w $\mathbb{C}P^2$. Podobnie, jeśli Σ jest abstrakcyjną zorientowaną powierzchnią rzeczywistą z brzegiem (wtedy brzeg jest rozłączną sumą okręgów), *genusem* Σ nazwiemy genus powierzchni powstałej po zaklejeniu wszystkich brzegów dyskami.

Kolejnym niezmiennikiem topologicznym będzie pierwsza liczba Bettięgo. Czyli wymiar pierwszej grupy homologii.

Aby ją dobrze obliczać, wprowadzimy pojęcie liczby gałęzi i liczby dziur.

Niech C będzie krzywą algebraiczną w $\mathbb{C}P^2$. Wtedy, po przecięciu C z bardzo dużą kulą, C będzie miało brzeg składający się z B okręgów. Wtedy B to jest liczba dziur C . Dla krzywej w $\mathbb{C}P^2$ położymy $B = 0$.

Uwaga 3. Czasami B nazywa się liczbą gałęzi w nieskończoności.

Krzywe $C \subset \mathbb{C}^2$ i $C \cap B(0, r)$ dla $r \gg 0$ są topologicznie homeomorficzne. Definicja liczby dziur przez badanie samej krzywej C jest nieco mniej intuicyjne, bo brzeg C składa się z punktów. Liczba dziur to nie jest to samo, co liczba punktów przecięcia domknięcia C z krzywą w nieskończoności.

Z liczbą gałęzi sytuacja jest bardziej skomplikowana. Mianowicie, topologicznie, krzywa C jest homeomorficzna z pewną gładką powierzchnią z utożsamionymi punktami. Na przykład, parametryzacja $x = t^2 + 1$, $y = t^3 + t$ krzywej $y^2 = x^3 + x^2$ utożsamia punkty i i $-i$ w $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Stąd krzywa $y^2 = x^3 + x^2$ jest topologicznie sferą z utożsamionymi dwoma punktami.

Przypuśćmy, że C jest homeomorficzna z Σ / \sim , Σ gładka, a relacja równoważności utożsamia punkty

Dlaczego jest zamknięta?

niezbyt ściśle

To jest taki fakt, który zostawiamy bez dowodu

Każde takie utożsamienie odpowiada pewnemu punktowi osobliwemu C .

$$x_{11} \sim x_{12} \sim \cdots \sim x_{1n_1}$$

$$x_{21} \sim x_{22} \sim \cdots \sim x_{2n_2}$$

...

$$x_{k1} \sim x_{k2} \sim \cdots \sim x_{kn_k}$$

Definicja 11. Całkowitą liczbą punktów podwójnych C nazwiemy liczbę $R = \sum_{j=1}^k (n_j - 1)$.

Pierwszą liczbę Bettiego można zdefiniować następująco.

1. Dla krzywej gładkiej w $\mathbb{C}P^2$ położymy $b_1 = 2g$.
2. Dla krzywej gładkiej w \mathbb{C} położymy $b_1 = 2g + B - 1$
3. Jeśli krzywa nie jest gładka, dodajemy R .

Ciąg Meyera–Viettorisa pokazuje, że utożsamienie n punktów zwiększa wymiar H_1 o $n-1$. Ponadto wycięcie pierwszego dysku nie rusza H_1 (tylko zabija H_2), następne wycięcia zwiększają H_1 o 1.

3. PUNKTY OSOBLIWE. NIEZMIENNIKI KLASYCZNE.

Teraz zajmiemy się analizą lokalną tego, co się dzieje w punkcie osobliwym. Na początek niezbyt trudne twierdzenie, które pozostawimy bez dowodu. Będziemy zakładali zawsze, że punkt osobliwy wypada w punkcie $(0, 0) \subset \mathbb{C}^2$ i leży na krzywej $C = \{F = 0\}$.

Twierdzenie 3. Istnieje takie $\varepsilon > 0$, że przecięcie $B(0, \varepsilon) \cap C$ jest homeomorficzne z r dyskami sklejonymi w jednym punkcie.

Definicja 12. Liczbę r nazywamy *ilością gałęzi* C w punkcie $(0, 0)$. Osobliwość nazwiemy “ostrzową” (ang. cuspidal), jeśli $r = 1$.

Przykład 4. Dla krzywej $x^p = y^q$, gdy p i q są względnie pierwsze punkt osobliwy $(0, 0)$ ma jedną gałąź. Punkt osobliwy lokalnie zadany przez $x^d - y^d = 0$ ma d gałęzi. Krzywa $y^2 = x^3 + x^2$ ma punkt osobliwy z dwoma gałęziami (lokalnie równoważny $x^2 - y^2 = 0$).

Pojęcia równoważności jeszcze nie zdefiniowaliśmy i spróbujemy tej definicji unikać jak długo się da.

Jakkolwiek samo F jest nierozkładalne, w pierścieniu lokalnym $\mathbb{C}[x, y]_{(x, y)}$ może już dać się rozłożyć (mówiąc po ludzku, może dać się zapisać w postaci $F = F^1 \cdots F^r$, gdzie F^j są funkcjami analitycznymi zerującymi się w zerze). Niech r będzie maksymalną ilością czynników występujących w rozkładzie. Wtedy r jest liczbą gałęzi zaś $\{F^k = 0\}$ jest równaniem lokalnie definiującym k -tą gałąź. Dla przykładu $y^2 - x^2 - x^3$ jest może nierozkładalny w $\mathbb{C}[x, y]$, ale można napisać

$$y^2 - x^2 - x^3 = (y - x + \dots)(y + x + \dots).$$

Drugim niezmiennikiem jest krotność. Podamy dwie definicje, nie wchodzące w szczegóły dotyczące równoważności.

Definicja 13. Niech $C = \{F(x, y) = 0\}$, oraz $F = F_1 + F_2 + \dots$, gdzie F_k jest jednorodny stopnia k . Wtedy *krotnością* punktu $(0, 0)$ nazwiemy $\min\{k: F_k \neq 0\}$. Dla punktu $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ rozpatrujemy $F(x - x_0, y - y_0) = F_1 + \dots$.

Tutaj piszemy indeksy u dołu, żeby odróżnić od poprzedniego zapisu, gdzie indeksy były na górze F^j i F_k to co innego

Druga definicja jest “topologiczna”.

Definicja 14. Niech ε będzie dostatecznie małe zaś P będzie prostą przechodzącą przez kulę $B(0, \varepsilon)$. Typowa P będzie transwersalna do C i przetnie C w m punktach zawartych w $B(0, 2\varepsilon)$. (może jeszcze gdzie indziej). Wtedy m jest krotnością.

Punkt krzywej jest gładki wtedy i tylko wtedy, gdy $m = 1$. Zawsze krotność jest większa lub równa, niż ilość gałęzi ($m \geq r$), przy czym równość zachodzi, gdy wszystkie gałęzie są gładkie.

Możemy rozpatrywać, zamiast krotności punktu osobliwego, krotność jego k -tej gałęzi, a więc krotność funkcji F^k . Jeśli m_k jest taką krotnością, to $m = \sum m_k$.

Bodaj najtrudniejszymi, ale i najważniejszymi niezmiennikami osobliwości są liczba Milnora μ i δ niezmiennik (liczba punktów podwójnych) spełniający warunek

$$2\delta = \mu + r - 1$$

gdzie r jest liczbą gałęzi. Z początku nie jest nawet jasne, że $\mu + r - 1$ jest parzysta. Poniżej podam kilka definicji liczby Milnora do wyboru.

Definicja 15 (Algebraiczna). Niech $C = \{F(x, y) = 0\}$ ma izolowany punkt osobliwy w zerze. Rozpatrujemy pierścień R szeregów formalnych $\mathbb{C}[[x, y]]$ (albo lepiej lokalizację pierścienia $\mathbb{C}[x, y]$ względem ideału (x, y)). Niech $I = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y})$ będzie ideałem (tzw. *ideał gradientowy*). Jeśli osobliwość jest izolowana (nie trudne twierdzenie), to $A_F = R/I$ jest skończenie wymiarową (nad \mathbb{C}) przestrzenią liniową. *Liczbą Milnora* nazwiemy $\dim_{\mathbb{C}} A_F$.

Definicja wygląda obrzydliwie, ale w prostych przypadkach da się wiele rzeczy policzyć.

Przykład 5. Niech $F = x^k - y^l$. Wtedy I jest ideałem rozpiętym przez x^{k-1} oraz y^{l-1} . Czyli A_F jest rozpięta przez elementy postaci $x^a y^b$, gdzie $0 \leq a \leq k-2$, $0 \leq b \leq l-2$. Czyli $\dim_{\mathbb{C}} A_F = (k-1)(l-1)$.

Definicja 16 (Topologiczna). Niech C i F jak wyżej. Trudne twierdzenie Milnora o bukietcie mówi między innymi, że

- (a) Istnieją takie $\delta > 0$ i $\varepsilon > 0$, że jeśli $U = F^{-1}(B(0, \varepsilon)) \cap B(0, \delta)$ (kula $B(0, \varepsilon)$ jest w \mathbb{C} , zaś kula $B(0, \delta)$ w \mathbb{C}^2), to odwzorowanie $F : U \setminus C \rightarrow B(0, \varepsilon) \setminus \{0\}$ jest lokalnie trywialnym rozwłóknieniem.
- (b) Włókno tego rozwłóknienia jest gładką powierzchnią homotopijnie równoważną bukietowi μ sfer S^1 .
- (c) Odwzorowanie $\phi : \partial B(0, \delta) \setminus C \rightarrow S^1$ zadane wzorem $z \rightarrow F(z)/|F(z)|$ jest lokalnie trywialnym rozwłóknieniem.

Liczbę μ nazywamy *liczbą Milnora* punktu osobliwego.

Równoważność dwóch powyższych definicji jest trudna. Właściwie jedynym względnie łatwym elementem w twierdzeniu Milnora (zob. Milnor, "Singular points of complex hypersurfaces") jest punkt (b). Pokazuje się, że funkcja wysokości (np. $|z_1|$) jest Morse'a i jedyne jej punkty krytyczne mogą mieć indeks zero albo 1 (nie ma lokalnych maksimów bo jest subharmoniczna).

Mamy następujący związek pomiędzy formułami liczbą Milnora a genussem:

Twierdzenie 4 (Formuła Serra'a). Niech C będzie krzywą stopnia d w $\mathbb{C}P^2$ mającą punkty osobliwe z_1, \dots, z_n o δ niezmiennikach kolejno $\delta_1, \dots, \delta_n$. Wtedy genus krzywej g zadaje się następująco:

$$(1) \quad g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - \sum_{i=1}^n \delta_i.$$

Formuły Serre'a można dowodzić następująco. Załóżmy teraz, że $C = \{F = 0\}$, $\deg F = d$, ma dokładnie jeden punkt osobliwy 0 w $\mathbb{C}P^2$. Przypuśćmy też, że ε i δ są takie jak w powyższej definicji, punkt a. Rozpatrzmy takie w , $|w| < \varepsilon$, że $C' = F^{-1}(w)$ jest gładka (czyli po prostu wartość niekrytyczną). Wtedy C' ma genus $g' = (d-1)(d-2)/2$. Niech Σ będzie gładką zwartą krzywą taką, że istnieje odwzorowanie $\pi : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$, które jest prawie wszędzie $1-1$. Tak naprawdę, możemy wziąć takie Σ , żeby było $1-1$ poza punktami, gdzie C ma punkt osobliwy z ilością gałęzi > 1 . Niech g będzie genusem Σ .

No to teraz zauważmy, że C i C' są sobie bardzo bliskie i różnią się tylko w kuli $B(0, \delta)$. Tak więc $\Sigma \setminus \pi^{-1}(B(0, \delta))$ i $C' \setminus B(0, \delta)$ są homeomorficzne. Teraz aby z $\Sigma \setminus \pi^{-1}(B(0, \delta))$ dostać Σ trzeba zakleić dokładnie r dziur rozłącznymi dyskami, czyli zwiększyć charakterystykę Eulera o r . A żeby dostać C' , zaklejamy te r dziur zbiorem $F^{-1}(w) \cap B(0, \delta)$, który jest homotopijny z bukietem μ sfer, czyli ma charakterystykę Eulera $1 - \mu$. Stąd

$$\chi(\Sigma) - \chi(C') = \mu + r - 1 = 2\delta.$$

czyli $g = g' - \delta$. W szczególności to pokazuje, że $\mu + r - 1$ jest parzyste. W ten sposób możemy udowodnić formułę Serre'a.

4. CIĄG CHARAKTERYSTYCZNY OSOBLIWOŚCI Z JEDNĄ GAŁĘZIĄ.

W dalszym ciągu C jest krzywą mającą w $(0, 0)$ punkt osobliwy. Na początku założmy, że ma on dokładnie jedną gałąź, czyli $B(0, \varepsilon) \cap C$ jest dyskiem. Wtedy istnieją dwie funkcje analityczne jednej zmiennej $\phi(t)$ i $\psi(t)$ spełniające $\phi(0) = \psi(0) = 0$, takie że lokalnie C parametryzuje się jako

$$(2) \quad \begin{aligned} x &= \phi(t) = a_p t^p + \dots \\ y &= \psi(t) = b_q t^q + \dots, \end{aligned}$$

gdzie zakładamy $a_p b_q \neq 0$. Inaczej mówiąc $F(\phi(t), \psi(t)) \equiv 0$. Tutaj $\min(p, q)$ jest oczywiście krotnością punktu osobliwego. Zazwyczaj, pisząc formuły jak wyżej będziemy domyślnie zakładali, że $p < q$, czyli że krotność wynosi p .

Gdyby F miało niezerowy gradient w zerze, to można byłoby lokalnie C sparametryzować za pomocą x , albo y . Wtedy, na przykład dałoby się zapisać $y = y(x)$ jako funkcję lokalnie analityczną. W przypadku, gdy krotność jest równa p , możemy napisać lokalnie

$$(3) \quad t = d_1 x^{1/p} + d_2 x^{2/p} + \dots,$$

gdzie d_i są prawie jednoznacznie wyznaczone, to znaczy z dokładnością do wyboru p -tego pierwiastka z jedności. Wtedy możemy napisać

$$(4) \quad y = c_q x^{q/p} + c_{q+1} x^{(q+1)/p} + c_{q+2} x^{(q+2)/p} + \dots$$

Definicja 17. Wzór (4) nazywamy *rozwinięciem Puiseux* osobliwości z jedną gałęzią.

Do listopada 2009, przy zadanej parametryzacji (2), wyznaczenie współczynników c_i sprowadzało się do wyznaczenia funkcji odwrotnej (3) i wstawienie t do (2). Czyli totalny koszmar, zwłaszcza gdy chce się wyliczyć więcej niż pierwsze trzy wyrazy, a czasem trzeba. Na szczęście teraz jest nowy algorytm [Bo2] wymagający dużo mniej zachodu.

Uwaga 4. Czasami pisze się $\tau = x^{1/p}$ i rozwinięcie Puiseux sprowadza za-pisuje się jako

$$\begin{aligned} x &= \tau^p \\ y &= c_q \tau^q + c_{q+1} \tau^{q+1} + \dots, \end{aligned}$$

takie odwzorowanie nazywa się fachowo *normalizacją*, dowód jego istnienia jest czysto algebraiczny, ale można sobie wyobrazić, że "rozklejamy" punkty o większej niż jedna gałęzi, a potem wszystko wyglądamy

Jest to treścią twierdzenia Puiseux

Matematycy też czytają między wierszami

w tym przypadku, prawie nie robi dużej różnicy

To jest ważne!

A zdawało się, że to jest martwa dziedzina...

co na jedno wychodzi.

Mając dane rozwinięcie Puiseux (3) możemy podać klasyfikację punktów osobliwych z jedną gałęzią, czyli wprowadzić ciągi charakterystyczne.

Uwaga 5. Istnieje N różnych definicji (ciągi charakterystyczne, ciągi Puiseux, pary Puiseux), gdzie N jest

$$O(\text{ilość specjalistów w dziedzinie}^2).$$

Wszystkie definicje, koniec końców, są równoważne.

Założmy, że mamy rozwinięcie jak w (4) gdzie $c_q \neq 0$. Kładziemy $p_0 = p$, oraz

$$q_0 = \min\{k: c_k \neq 0 \wedge p \nmid k\}.$$

Postępujemy rekurencyjnie. Przypuśćmy, że p_n i q_n są określone. Definiujemy

$$p_{n+1} = \text{nwd}(p_n, q_n).$$

Jeśli $p_{n+1} = 1$, procedurę kończymy. Jeśli nie, określamy

$$q_{n+1} = \min\{k: c_k \neq 0 \wedge p_{n+1} \nmid k\}.$$

Jeżeli parametryzacja (2) jest lokalnie 1 – 1 (a tak zakładamy), procedura się zakończy po pewnej liczbie N kroków.

Definicja 18. Ciąg $(p; q_0, q_1, \dots, q_N)$ (średnik dla ułatwienia, konwencja MB), nazwiemy *ciągiem charakterystycznym* punktu osobliwego.

Naturalnie, z danych liczb $p; q_0, \dots, q_N$ można bez problemu odzyskać p_k za pomocą rekurencyjnego wzoru $p_0 = p$, $p_{k+1} = \text{nwd}(p_k, q_k)$.

Poniższa definicja ma charakter czysto konwencjonalny.

Definicja 19. Jeśli $k = q_s$ dla pewnego s , wyraz Puiseux $c_k x^{k/p}$ (względnie samo c_k , lub nawet k) nazwiemy *istotnym* (ang. essential). W przeciwnym wypadku będziemy mówili że wyraz jest *nieistotny*.

A ta już ma więcej sensu.

Definicja 20. Dwie osobliwości z jedną gałęzią nazwiemy (topologicznie) *równoważnymi*, jeśli mają te same ciągi charakterystyczne.

Podstawowa definicja topologicznej równoważności jest taka, że C i C' mają topologicznie równoważne osobliwości w z i z' , jeśli istnieją małe kule $B = B(z, \varepsilon)$ i $B' = B(z', \varepsilon')$ oraz homeomorfizm między B a B' , który przeprowadza $C \cap B$ na $C' \cap B'$.

Jest to równoważne istnieniu homeomorfizmu pomiędzy ∂B a $\partial B'$, który przeprowadza C na C' . To oznacza, że węzły osobliwości (ob. niżej) topologicznie równoważnych są równoważne.

Istnieje definicja równoważności analitycznej, gdzie wymaga się, by powyższy homeomorfizm był analityczną równoważnością, ale to jest trudna definicja i nie będziemy się tym zajmować.

Przykład 6. Założmy, że dana jest osobliwość o krotności 12, której rozwinięcie Puiseux zadane jest przez

$$y = c_{12}x^{12/12} + c_{18}x^{18/12} + c_{24}x^{24/12} + c_{28}x^{28/12} + c_{30}x^{30/12} + c_{33}x^{33/12} + \dots,$$

gdzie $c_{12}, c_{18}, c_{24}, c_{28}, c_{30}, c_{33}$ są niezerowe. Wtedy ciąg charakterystyczny jest równy $(12; 18, 28, 33)$, przy czym $p_0 = 12$, $p_1 = 6$, $p_2 = 2$, $p_3 = 1$. Przy tym zauważmy, że wyrazy c_{12} , c_{24} i c_{30} są nieistotne, gdyż nie wpływają na

wszystkie prawdziwe twierdzenia matematyki są, koniec końców, równoważne

to jest takie twierdzenie, zresztą niezbyt trudne

może lepiej esencjonalnym?

Co ma topologia do ciągu charakterystycznego?

ciąg charakterystyczny (12|12, 12|24 oraz 2|30). Nieistotny będzie też wyraz c_{32} , który akurat znika. Ale to znikanie nic nie znaczy, bo ten wyraz jest nieistotny.

Znając ciąg charakterystyczny możemy obliczyć liczbę Milnora. W tym celu musimy znać nie tylko q_i , ale p_i .

Twierdzenie 5 (formuła Milnora). Niech dana będzie osobliwość z jedną gałęzią o ciągu charakterystycznym (p_0, q_0, \dots, q_n) , oraz p_i zdefiniowanych indukcyjnie przez $p_{i+1} = \text{nwd}(p_i, q_i)$. Wtedy

$$\mu = (p_0 - 1)(q_0 - 1) + \sum_{i=1}^n (q_i - q_{i-1})(p_i - 1).$$

Przykład 7. Osobliwość jednorodna $x^p - y^q = 0$, gdzie $\text{nwd}(p, q) = 1$ ma $p_0 = p$, $q_0 = q$ i $\mu = (p - 1)(q - 1)$. W Przykładzie 6 mieliśmy $\mu = (12 - 1)(18 - 1) + (28 - 18)(6 - 1) + (33 - 28)(2 - 1) = 242$.

Ustalmy teraz pewne $p > 0$ i rozpatrzmy pewien ciąg charakterystyczny $\vec{c} = (p; q_0, q_1, \dots, q_n)$. W przestrzeni wszystkich wielomianów $k(t) \in \mathbb{C}[t]$ rozpatrujemy podzbiór A_c wielomianów takich, że osobliwość zadana lokalnie przez

$$x = \phi(t) = t^p, \quad y = k(t)$$

ma ciąg charakterystyczny \vec{c} . Zbiór A_c jest zadany przez pewien skończony układ równań i nierówności.

Definicja 21. Wielkość $\nu_y = \text{codim } A_c$ nazywamy *y-kowymiarem* punktu osobliwego. Wielkość

$$\nu = \nu_y + p - 2$$

nazwiemy *kowymiarem*.

Przykład 8. Jeśli ciąg charakterystyczny jest równy $(p; q)$, $\lfloor q/p \rfloor = n > 0$, to $k(t)$ musi być postaci

$$b_p t^p + b_{2p} t^{2p} + \dots + b_{np} t^{np} + b_q t^q + \dots$$

Tutaj b_p, \dots, b_{np} są nieistotne. Stąd

$$\nu_y = q - \left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor - 1, \quad \text{zaś } \nu = p + q - \left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor - 3.$$

Inaczej mówiąc, *y-kowymiar* zlicza wszystkie istotne współczynniki Puiseux, które muszą się zerować.

Przykład 9. Weźmy naszą ulubioną osobliwość (12; 18, 28, 33). Niech

$$k(t) = b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_{33} t^{33} + \dots$$

Dla niecierpliwych: to może być definicja liczby Milnora dla osobliwości z jedną gałęzią

może ktoś chce policzyć stosowny ideał i wymiar pierścienia ilorazowego?

no, bez przesady z tym lubieniem

Wtedy zbiór A_c jest opisany warunkami

$$\begin{aligned} b_1 = \dots = b_{11} &= 0 \\ b_{13} = \dots = b_{17} &= 0 \\ b_{18} &\neq 0 \\ b_{19} = \dots = b_{23} &= 0 \\ b_{25} = b_{26} = b_{27} &= 0 \\ b_{28} &\neq 0 \\ b_{29} = b_{31} &= 0. \end{aligned}$$

Stąd $\nu_y = 26$, zaś $\nu = 36$.

Ważną własnością kowymiaru jest tzw. nierówność ZOZ , [BZ1].

Twierdzenie 6. Niech C ma w zerze osobliwość o krotności m , liczbie Milnora μ oraz y -kowymiarze ν_y . Wtedy

$$(5) \quad \mu \leq m\nu_y = m(\nu - m + 2).$$

Dowód jest indukcyjny po długości ciągu charakterystycznego. Łatwo wypisać wszystkie możliwe przypadki, gdy nierówność jest równością . Na pewno nie ma równości, gdy ciąg charakterystyczny nie jest bardzo krótki, tzn. gdy $p_1 > 1$.

Niestety, tak jak byliśmy w stanie wyszacować sumę δ niezmienników przez genus krzywej, tak szacowanie kowymiarów jest o wiele trudniejsze. To znaczy da się to zrobić, ale wymaga stosowania bardzo mocnych twierdzeń.

Naiwnie można rozumować w taki sposób. Na przykład weźmy sobie wszystkie takie krzywe $C \subset \mathbb{C}^2$, które dają się przedstawić jako obraz $C = (\phi(t), \psi(t))$, gdzie ϕ i ψ są wielomianami stopni odpowiednio p i q . Przestrzeń takich krzywych ma wymiar z grubsza $p + q$. Sugerowałoby to, że suma kowymiarów wszystkich punktów osobliwych krzywej, którą się da w ten sposób opisać, jest z grubsza $p+q$. Tylko, że to jest bardzo ciężki problem otwarty. Osobiście potrafię znaleźć takie oszacowanie ale tylko wtedy, gdy kontroluję liczbę gałęzi (ob. wyżej) krzywej. Jako, że liczba gałęzi krzywej takiej jak tu, może być $pq/2$, ta kontrola jest rzeczywiście istotna.

Z drugiej strony na tak sformułowaną tezę nie ma kontrprzykładów.

5. PUNKTY OSOBLIWE Z WIELOMA GAŁĘZIAMI

W przypadku punktu osobliwego z więcej niż jedną gałęzią możemy sparametryzować każdą gałąź z osobna. Uzyskamy wtedy brzydko wyglądający układ

$$(6) \quad \begin{aligned} \phi^1(t) &= a_{p_1}^1 t^{p_1} + \dots \\ \psi^1(t) &= b_{q_1}^1 t^{q_1} + \dots \\ &\dots \\ \phi^r(t) &= a_{p_r}^r t^{p_r} + \dots \\ \psi^1(t) &= b_{q_r}^r t^{q_r} + \dots \end{aligned}$$

Przy czym dla dowolnego $k = 1, \dots, r$, $x = \phi^k(t)$, $y = \psi^k(t)$ jest lokalną parametryzacją k -tej gałęzi. W związku z tym możemy dla dowolnej gałęzi

Zajdenberg–
Orevkov–Żołądek

powyżej rolę m spełniało p

nigdy nie byłem w stanie zapamiętać, co to znaczy ostra nierówność

mogą być krzywe równoważne sobie przez automorfizm \mathbb{C}^2 , więc ten wymiar jest nieco, ale tylko nieco, niższy

napisać rozwinięcie Puiseux

$$(7) \quad \begin{aligned} y^1 &= c_{q^1}(x^1)^{q^1/p^1} + \dots \\ &\dots \\ y^r &= c_{q^r}(x^r)^{q^r/p^r} + \dots \end{aligned}$$

Z każdego takiego rozwinięcia da się wyprodukować ciąg charakterystyczny dla danej gałęzi, policzyć liczbę Milnora i kowymiar poszczególnych. Niemniej jednak to nie jest pełna informacja o tym, jak wygląda osobliwość. Potrzebujemy istotnej informacji o tym, jaki jest rząd styczności poszczególnych gałęzi.

Informację tę niesie tzw. indeks przecięcia. Najpierw podamy niebanalną definicję ogólną, potem pokażemy jak liczyć.

Definicja 22. Niech $C_1 = \{F_1(x, y) = 0\}$, $C_2 = \{F_2(x, y) = 0\}$ będą dwiema krzywymi przecinającymi się w punkcie $(0, 0)$ przy czym to przecięcie jest izolowane. *Indeksem przecięcia* nazwiemy przyporządkowanie krzywom C_1 i C_2 liczby l , oznaczanej $l(C_1, C_2)$ lub $C_1 \cdot C_2$ ($(C_1 \cdot C_2)_0$ gdy chcemy zaznaczyć, że chodzi o przecięcie w zerze) albo inaczej liczby całkowitej nieujemnej, takiej że

jeśli nie jest izolowane, położymy indeks równy ∞

- (a) $l = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy C_1 i C_2 są gładkie w zerze i przecinają się transversalnie;
- (b) indeks przecięcia jest addytywny, to znaczy jeśli $C_2 = \{F_{21} \cdot F_{22} = 0\}$ (lokalnie) i $C_{21} = \{F_{21} = 0\}$, $C_{22} = \{F_{22} = 0\}$, to $C_1 \cdot C_2 = C_1 \cdot C_{21} + C_1 \cdot C_{22}$;
- (c) Jeśli $C_2^\varepsilon = \{F_2(x, y) = \varepsilon\}$ jest transversalne do C_1 , to przecina C_1 w dokładnie $l = C_1 \cdot C_2$ punktach bliskich 0.

Istnienie indeksu przecięcia nie jest oczywiste. Definiuje się go zazwyczaj jako wymiar przestrzeni liniowej $\mathbb{C}[[x, y]]_{(0,0)}/(F_1, F_2)$ i sprawdza, że ma podane własności.

Najważniejsze własności indeksu przecięcia są takie, że po pierwsze jest addytywny (zob. punkt (b) powyższej definicji), a także, że łatwo go policzyć, jeśli C_1 jest zadana przez parametryzację $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, zaś $C_2 = \{F_2(x, y) = 0\}$.

Lemat 3. Indeks przecięcia jest równy krotności zera złożenia $t \rightarrow F_2(\phi(t), \psi(t))$ w punkcie $t = 0$.

Dowód tego faktu można przeprowadzić korzystając z punktu (c) definicji indeksu przecięcia.

Przykład 10. Załóżmy, że mamy dane dwie gałęzie, sparametryzowane odpowiednio przez $x = \phi_i(t)$, $y = \psi_i(t)$, $i = 1, 2$, przy czym $\text{ord}_{t=0} \phi_i(t) = p_i$, $\text{ord}_{t=0} \psi_i(t) = q_i$. Jeśli tylko $p_1 q_2 \neq p_2 q_1$, to

$$C_1 \cdot C_2 = \min(p_1 q_2, p_2 q_1).$$

Istotnie, drugą gałąź można zapisać jako $F_2 = 0$, gdzie $F_2 = y^{p_2} - x^{q_2} + \dots$, gdy p_2 i q_2 są względnie pierwsze, lub $F_2 = (y^{p'_2} - x^{q'_2})^{r_2} + \dots$, gdy $r_2 = \text{nwd}(p_2, q_2) > 1$ i $p'_2 = p_2/r_2$, $q'_2 = q_2/r_2$.

Mając dane liczby Milnora gałęzi można policzyć δ niezmiennik punktu osobliwego.

Twierdzenie 7. Niech C ma punkt osobliwy w $(0, 0)$ z gałęziami C_1, \dots, C_n . Załóżmy, że μ_i jest liczbą Milnora i -tej gałęzi, zaś lokalny indeks przecięcia i -tej i j -tej wynosi a_{ij} . Wtedy

Ważny wzór!

$$(8) \quad 2\delta = \sum_{i=1}^n \mu_i + 2 \sum_{i < j} a_{ij}.$$

Ponadto $\mu = 2\delta + (1 - n)$ jest liczbą Milnora punktu osobliwego C .

Można również zdefiniować kowymiar punktu osobliwego. Najpierw zróbmy to dla dwóch gałęzi. Niech jedna gałąź C_1 ma kowymiar ν_1 , druga ν_2 . Określmy kowymiar jako

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_{tan} + 2,$$

gdzie ν_{tan} jest pewną liczbą opisującą, jak długo ciągi Puiseux dwóch rozwinięć są zgodne.

Niepokoić może to +2 w definicji. Okazuje się, że jest ono potrzebne, a nawet niezbędne aby definicja była konsystentna. Skąd się bierze? Ano stąd, że gałęzie możemy sparametryzować $x = \phi_i(t)$, $y = \psi_i(t)$, gdzie $i = 1, 2$. Zwykle pisaliśmy $\phi = a_i t^{p_i} + \dots$, ale tak naprawdę zakładaliśmy w ten sposób, że punkt osobliwy wypada w zerze $\phi(0) = \psi(0) = 0$. Możemy sobie zawsze przenieść (przez automorfizm \mathbb{C}^2) środek $\phi_1(0), \psi_1(0)$ do zera. Ale wtedy dostajemy dwa warunki $\phi_2(0) \stackrel{!}{=} 0$ i $\psi_2(0) \stackrel{!}{=} 0$. To daje dwa dodatkowe warunki, stąd wychodzi +2.

Aby określić ν_{tan} , przypuśćmy, że mamy dwa rozwinięcia Puiseux

$$(9) \quad \begin{aligned} \text{Składowa A: } & y = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 x^{1/n} + \dots + \mathbf{a}_s x^{s/n} + \dots \\ \text{Składowa B: } & y = \tilde{\mathbf{a}}_0 + \tilde{\mathbf{a}}_1 x^{1/\tilde{n}} + \dots + \tilde{\mathbf{a}}_{\tilde{s}} x^{\tilde{s}/\tilde{n}} + \dots, \end{aligned}$$

Przy czym te rozwinięcia aż do wyrazu \mathbf{a}_s i $\tilde{\mathbf{a}}_{\tilde{s}}$ są równe. Oznacza, to, że — po odpowiednim wyborze gałęzi pierwiastka — jeśli $k/n = \tilde{k}/\tilde{n}$, to $\mathbf{a}_k = \tilde{\mathbf{a}}_{\tilde{k}}$. Z drugiej strony, jeśli wyraz $x^{k/n}$ ze składowej A nie pojawia się w drugim rozwinięciu, musimy mieć $\mathbf{a}_k = 0$.

Niech y_{wsp} oznacza część wspólną obu rozwinięć.

Przykład 11. Jeśli mamy rozwinięcia

$$\begin{aligned} y_1 &= x - x^{3/2} + x^2 + ix^{9/4} + \dots \\ y_2 &= x + x^{3/2} + x^2 + 3x^{16/6} + \dots \end{aligned}$$

To część wspólna rozwinięć będzie równa $y_{wsp} = x + x^{3/2} + x^2$. Istotnie, po wymnożeniu x przez pewien pierwiastek czwartego stopnia z jednościami (konkretnie $\pm i$) pierwsze rozwinięcie będzie się zgadzało z drugim aż do wyrazu x^2 włącznie.

Załóżmy, że część wspólna jest postaci

$$(10) \quad y = c_1 x^{1/m} + \dots + c_s x^{s/m},$$

gdzie m jest tak dobrane, że $\text{nwd}\{i: c_i \neq 0\} = 1$, czyli jest najmniejsze możliwe m , przy którym część wspólną można zapisać. (Można sobie wpisać zamiast m $2m$ i wszystkie c_i z nieparzystym i położyć 0).

Definicja 23. Liczbę s nazywamy *kowymiarem stycznym* dwóch gałęzi i oznaczamy ν_{tan} .

Z wrodzonego lenistwa robię Alt+W/Ctrl-Y z pracy doktorskiej (zobacz też[BZ2]). Pod pewnymi względami praca doktorska może być całkiem niezłym źródłem, bo pisałem tak, aby każdy mógł zrozumieć.

współczynniki Puiseux są dobrze określone z dokładnością do wyboru pierwiastka n -tego i \tilde{n} -tego stopnia z jednościami

W przypadku więcej, niż dwóch gałęzi definicja kowymiaru jest nieco bardziej skomplikowana. Będziemy postępowali indukcyjnie. Niech C będzie miało osobliwość z n -gałęziami C_1, \dots, C_n przy czym kowymiar osobliwości C_1, \dots, C_{n-1} jest już ustalony i wynosi ν' . Niech ν_n oznacza kowymiar osobliwości C_n , zaś ν_{jn} — kowymiar styczny gałęzi C_j i C_n . Wtedy określamy kowymiar ν osobliwości C jako

$$(11) \quad \nu = \nu' + \nu_n + \max_{1 \leq j \leq n-1} \nu_{jn} + 2.$$

Znaczenie $+2$ jest takie, jak wyżej.

Wzór (11) ma sens również wtedy, gdy któraś z gałęzi jest gładka, jeśli przyjmiemy, że kowymiar gładkiej gałęzi wynosi -1 .

Pewną trudność może sprawić dowiedzenie, że tak określona definicja kowymiaru jest poprawna, to znaczy, że nie zależy od kolejności dodawania gałęzi. Dowód można znaleźć w [BZ3]

Mamy najważniejszy przykład.

Przykład 12. Niech C ma w zerze *zwykły punkt podwójny* (ang. ordinary double point), to znaczy lokalnie zadaje się równaniem $x^2 - y^2 = 0$, równoważnie, C ma dwie gładkie gałęzie przecinające się transwersalnie w zerze. Wtedy kowymiar każdej gałęzi wynosi -1 , zaś kowymiar styczny 0 (rozwiniecie $y = x + \dots$, $y = -x + \dots$, gdzie kropki oznaczają wyrazy o całkowitych potęgach x (bo krotność każdej gałęzi wynosi 1 i $1/1 \in \mathbb{Z}$) nie ma części wspólnej). Stąd $\nu = 0$.

Punkt podwójny jest jedynym punktem osobliwym o znikającym kowymiarze. Inne osobliwości mają kowymiar dodatni.

Stosując kilka sprytnych wzorów można uogólnić nierówność (5) na przypadek dowolnej liczby gałęzi.

Twierdzenie 8 (MB). Niech C ma osobliwość w zerze o krotności m , δ -niezmienniku δ , kowymiarze ν i r gałęziach. Wtedy

$$2\delta \leq m(\nu - m + r + 1).$$

Dowód jest indukcyjny po ilości gałęzi. Równość mamy w dość rzadkich przypadkach, np. dla zwykłych m -krotnych punktów podwójnych. Tutaj zamiast μ mamy 2δ , które dla jednej gałęzi jest równe liczbie Milnora.

Powyższe uwagi pozwalają na rozpoczęcie szacowań. Potrzebujemy właściwie jeszcze nierówności wiążącej kowymiary ze stopniem krzywej, ale o niej później.

6. ROZDMUCHANIE

Opiszemy teraz procedurę, która na podstawowym poziomie pozwoli na przypisanie punktowi osobliwemu pewnego grafu (diagramu), którego wierzchołki będą dodatkowo miały przypisane wagi. Wagi będą liczbami ujemnymi. Tak naprawdę, to najpierw skonstruujemy diagram, którego krawędzie będą miały wagi a następnie przejdziemy do bardziej naturalnego diagramu dualnego. Ale po kolei.

Rozdmuchanie jest operacją analogiczną do wprowadzania współrzędnych biegunowych. Przy czym ma tę zaletę, że pracuje zarówno w liczbach rzeczywistych, jak i zespolonych, a ponadto jest wielomianowe. Wadą natomiast

jest to, że efektem (przeciwobrazem) rozdmuchania jest nie przestrzeń \mathbb{C}^n albo \mathbb{R}^n , ale tak naprawdę pewien podzbiór w przestrzeni rzutowej. My skupimy się na przypadku \mathbb{C}^2 .

Definicja 24. Niech \mathbb{C}^2 będzie płaszczyzną i $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$. Rozważmy zbiór

$$A_0 = \{(x, y, [x : y]) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}P^1 : (x, y) \in \mathbb{C}^2 \setminus (0, 0)\}.$$

Domknięcie A zbioru A_0 w $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}P^1$ nazywamy *rozdmuchaniem* \mathbb{C}^2 w punkcie $(0, 0)$. Zbiór $E = A \setminus A_0$ nazwiemy *krzywą wyjątkową*. E jest oczywiście kopią $\mathbb{C}P^1$.

Mamy naturalnie zdefiniowane odwzorowanie $\pi : A \rightarrow \mathbb{C}^2$, które na A_0 polega na zapomnieniu o pierwszej współrzędnej, natomiast krzywą wyjątkową przeprowadza w punkt $(0, 0)$.

Niech C będzie dowolną krzywą w \mathbb{C}^2 .

Definicja 25. *Rozdmuchaniem* C w punkcie $(0, 0)$ nazywamy zbiór $\pi^{-1}(C)$. *Przeciwobrazem właściwym* C nazwiemy domknięcie zbioru $\pi^{-1}(C) \cap A_0$.

Jeśli C nie przechodzi przez $(0, 0)$, rozdmuchanie nic nie robi z krzywą.

Wielką zaletą rozdmuchania jest to, że łatwo się je liczy. Nie należy się bać $\mathbb{C}P^1$ występującego w definicji. Istotnie, jeśli mamy współrzędne (x, y) na \mathbb{C}^2 , możemy wprowadzić sobie współrzędną x/y (albo y/x) na $\mathbb{C}P^1$ i być zadowolonym. Stąd inna, równoważna definicja rozdmuchania “dla fizyków”.

z interpretacją typowo fizyczną: tak się liczy

Definicja 26. Rozważmy dwie kopie \mathbb{C}^2 (nazwane U i U') ze współrzędnymi odpowiednio (u, v) i (u', v') . Niech $\pi : U \rightarrow \mathbb{C}^2$ będzie zadane wzorem $\pi(u, v) = (uv, v)$ zaś $\pi'(u', v') = (u', u'v')$. Niech

$$A = U \amalg U' / \sim,$$

gdzie $(u, v) \sim (u', v')$, gdy $\pi(u, v) = \pi'(u', v')$. Wtedy A nazwiemy *rozdmuchaniem* \mathbb{C}^2 w punkcie $(0, 0)$.

Zagadka. Skąd tutaj się bierze $(0, 0)$?

Z definicji wynika, że A jest rozmaitością, U i U' zadają atlas, funkcją przejścia jest $(u', v') = (uv, 1/u)$. Ponadto poza punktami, gdzie $y = 0$ na \mathbb{C}^2 możemy napisać $u = x/y, v = y$ i zadaje to przekształcenie π^{-1} . Podobnie dla $x \neq 0$, zapis $u' = x, v' = y/x$ zadaje π'^{-1} .

Ponadto na punkt $(0, 0)$ przechodzi zbiór $v = 0$ w U i $u' = 0$ w V . Funkcja przejścia między tymi dwoma zbiorami zadaje się przez $v' = 1/u$. To oznacza, że przeciwobraz $(0, 0)$ jest jednowymiarową przestrzenią rzutową (sferą Riemanna).

Przykład 13. Niech $C = \{x^2 - y^3 = 0\}$. Wprowadźmy współrzędne $x = uv, y = v$. Wtedy przeciwobraz C zadaje się przez

$$v^2(u^2 - v) = 0.$$

Krzywa wyjątkowa (przeciwobraz zera) zadaje się równaniem $v = 0$. Tak więc przeciwobraz właściwy jest równy $u^2 - v = 0$. Zauważmy, że przeciwobraz właściwy jest gładki.

Z drugiej strony, jeśli wprowadzimy współrzędne $x = u', y = u'v'$ otrzymamy

$$u'^2(1 - u'v'^3) = 0.$$

Tak krzywa (przeciwobraz właściwy zadany przez $1 - u'v'^3 = 0$) nie przecina $u' = 0$ (czyli przeciwobrazu $(0, 0)$). Tak więc w tym układzie współrzędnych (w tej mapie) krzywa nie jest interesująca.

Można poczynić kilka uwag.

- (a) Z równania wyłączyło się v^2 (potem u'^2). Tutaj 2 jest krotnością punktu osobliwego. To jest taki ogólny fakt, nietrudny do dowodu.
- (b) Krzywa jest “ciekawa” tylko w jednej mapie. Czasami trzeba tę mapę wybrać, czasami nie ma ona znaczenia, czasami trzeba rozpatrywać dwie.
- (c) Osobliwości krzywych rozdmuchanych są “prostsze” niż krzywej wyjściowej.

Przykład 14. Rozważmy punkt podwójny $y^2 - x^2 = 0$. We współrzędnych (u, v) mamy $v^2(u^2 - 1) = 0$ (podobnie w drugiej mapie). Tak więc przeciwobraz właściwy jest sumą dwóch prostych równoległych $u = 1$ i $u = -1$, przecinających krzywą wyjątkową transwersalnie.

W powyższym przykładzie każda prosta równoległa odpowiada jednej gałęzi. Mówimy, że po rozdmuchaniu gałęzie rozdzieliły się.

Uwaga 6. Dwie gałęzie przechodzące przez punkt $(0, 0)$ rozdzielają się wtedy i tylko wtedy, gdy ich kierunki styczne są różne.

Postępując dalej tak samo, to znaczy rozdmuchując punkty osobliwe przeciwobrazu właściwego (te punkty osobliwe, które leżą nad punktem $(0, 0)$, krzywa może mieć jeszcze inne punkty osobliwe, ale cała procedura jest lokalna) możemy dojść do sytuacji, w której mamy odwzorowanie $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}^2$ będące złożeniem rozdmuchań $\pi_n \circ \dots \circ \pi_1$ takie, że.

- (a) Przeciwobraz $E = \pi^{-1}(0, 0)$ jest sumą krzywych $E_1 \cup E_n$ (n jest liczbą rozdmuchań). Każda krzywa E_k jest sferą S^2 (dokładniej $\mathbb{C}P^1$). E_k jest przeciwobrazem właściwym krzywej wyjątkowej powstałej przy k -tym rozdmuchaniu. Czyli E_n jest krzywą wyjątkową dla π_n , E_{n-1} jest przeciwobrazem właściwym krzywej wyjątkowej dla π_{n-1} itd.
- (b) E_k przecinają się transwersalnie.
- (c) Przeciwobraz właściwy C' krzywej C jest krzywą gładką (w otoczeniu E , rozpatrujemy sytuację lokalnie). W szczególności wszystkie gałęzie są rozłączne.
- (d) C' przecina E transwersalnie. W szczególności C' nie przechodzi przez punkty przecięcia różnych gałęzi.
- (e) rozdmuchanie jest minimalne spośród wszystkich możliwych.

(a) jest własnością ogólną, wynikającą z konstrukcji, a nie jakiegoś specjalnego (b) też wynika z konstrukcji

Definicja 27. Złożenie rozdmuchań spełniające powyższe warunki nazwiemy *rozwiązaniem osobliwości*. Jest ono jednoznacznie wyznaczone.

Jednoznaczność jest też twierdzeniem.

Przykład 15. Dla osobliwości $y^2 - x^2 = 0$ wystarczy jedno rozdmuchanie, opisane wyżej.

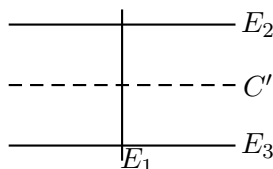
Przykład 16. Rozważmy osobliwość $y^2 - x^3 = 0$ (zob. Przykład 13). Po rozdmuchaniu mamy $u - v^2 = 0$. Ta krzywa jest wprawdzie gładka, ale styczna do krzywej E_1 zadanej przez $u = 0$, która jest krzywą wyjątkową. Nie spełnia więc warunku (d).

Rozdmuchujemy jeszcze raz, przyjmując $u = u_1 v_1$, $v = v_1$. Przeciwobraz właściwy krzywej E_1 jest zadany przez $u_1 = 0$ (nadal będziemy oznaczali go przez E_1). Krzywą wyjątkową jest $E_2 = \{v_1 = 0\}$. Natomiast $u - v^2 = 0$ przechodzi na $u_1 - v_1 = 0$. Ta krzywa jest gładka, przecina E_1 i E_2 transwersalnie,

ale przechodzi przez punkt przecięcia E_1 i E_2 . Potrzebne jest jeszcze jedno rozdmuchanie, żeby rozdzielić krzywe. Możemy wziąć dowolną mapę, weźmy $u_1 = u_2$, $v_1 = u_2 v_2$. Wtedy krzywą wyjątkową jest $E_3 = \{u_2 = 0\}$, nasza wyjściowa krzywa przejdzie na $v_2 = 1$. E_2 przechodzi na krzywą $\{v_1 = 0\}$. Ale równanie E_1 przechodzi na $\{u_2 = 0\}$. To nie znaczy, że przeciwobrazem E_1 jest krzywa wyjątkowa (bo krzywa wyjątkowa jest przeciwobrazem punktu, a E_1 to jest coś więcej, niż punkt).

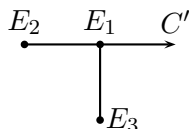
Przeciwobraz właściwy E_1 nie znajduje się w mapie (u_2, v_2) . Gdy bowiem napiszemy $u_1 = u'_2 v'_2$, $v_1 = v'_2$, to krzywa wyjątkowa zadana jest przez $v'_2 = 0$ zaś przeciwobraz właściwy E_1 jest równy $\{u'_2 = 0\}$. Oczywiście $\{u'_2 = 0\}$ leży tylko w jednej mapie.

Ostatecznie otrzymujemy następujący, schematyczny rysunek.



Tutaj na rysunku zaznaczamy, że krzywa wyjątkowa E_3 przecina krzywe E_1 i E_2 , a E_1 i E_2 się nie przecinają.

Powyższemu rysunkowi przypisujemy graf, którego wierzchołkami są krzywe wyjątkowe, krawędzie odpowiadają przecinającym się krzywom wyjątkowym. Przy każdym wierzchołku rysujemy tyle strzałek, ile gałęzi rozdmuchiwanej krzywej przecina daną krzywą wyjątkową. W tym przypadku rysunek będzie wyglądał tak.



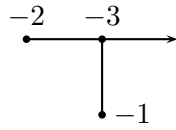
Do pełni szczęścia pozostaje nam jeszcze przypisanie wag dla każdego wierzchołka. Poniżej podamy algorytm.

Wagę przy wierzchołku odpowiadającemu krzywej E_i będzie indeks samoprzecięcia krzywej $E_i \cdot E_i$ w X . Ten indeks zmniejsza się za każdym razem, gdy dokonujemy rozdmuchania.

- Przy dowolnym rozdmuchaniu, nowo powstającej krzywej wyjątkowej przypiszemy wagę -1 .
- Każda krzywa wyjątkowa, która przechodzi przez punkt, który rozdmuchujemy, jeśli miała wagę n , po rozdmuchaniu będzie miała wagę $n - 1$.
- Jeśli krzywa wyjątkowa nie przechodzi przez rozdmuchiwany punkt, jej waga pozostaje bez zmian.

Przykład 17. Dla krzywej $y^2 - x^3 = 0$, w pierwszym kroku mamy wagę $w(E_1) = -1$. Inne krzywe nie mają wagi, bo ich jeszcze nie ma. W drugim rozdmuchaniu pojawia się E_2 z $w = -1$, zaś $w(E_1) = -2$. Przy trzecim $w(E_3) = -1$, $w(E_2) = -2$, $w(E_1) = -3$.

Stąd uzyskamy następujący graf.



Uwaga 7. Konkurencyjna konwencja przypisuje wierzchołkom liczby dodatnie, i zmienia potem wszędzie znaki.

Z każdą osobliwością możemy związać taki graf, jak wyżej. A z każdym grafem możemy powiązać macierz.

Definicja 28. Macierz (albo formę) związaną z grafem z wagami przy wierzchołkach (o n wierzchołkach E_1, \dots, E_n) nazwiemy macierz $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^n$ taką, że

- (a) $m_{ii} = w(E_i)$;
- (b) gdy $i \neq j$ $m_{ij} = 1$ gdy wierzchołki E_i i E_j są połączone, 0 w przeciwnym wypadku.

Macierz M jest standardową formą przecięcia w drugich homologiach X .

Uwaga 8. Macierz pochodząca od diagramu rozdmuchania jest unimodalna (ma wyznacznik ± 1) i ujemnie określona. Obu tych faktów można dowieść przez indukcję po ilości rozdmuchań, albo korzystając z zaawansowanej wiedzy teoretycznej.

Macierz M zadaje swego rodzaju mnożenie (iloczyn skalarny) na przestrzeni liniowej rozpiętej przez wierzchołki. Dwóm formalnym kombinacjom $A = \sum \alpha_j E_j$, $B = \sum \beta_k E_k$ liczbę

$$A \cdot B = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) M (\beta_1, \dots, \beta_n)^T.$$

Definicja 29. Klasę kanoniczną albo dywizorem kanonicznym nazwiemy kombinację liniową $K = \sum k_i E_i$ taką, że

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad E_i \cdot (K + E_i) = -2.$$

Jako, że macierz M jest unimodalna, K istnieje i ma wszystkie współczynniki całkowite. Podobnie definiujemy klasę C (kolizja oznaczeń z krzywą jest zaplanowana).

Definicja 30. Klasę krzywej nazwiemy taką kombinacją liniową $C = \sum \gamma_i E_i$, że dla każdego i , iloczyn $C \cdot E_i$ jest równy ilości strzałek w grafie, które wychodzą z i -tego wierzchołka.

Niech też

$$E = E_1 + \dots + E_n, \quad D = C + E.$$

Przykład 18. Dla osobliwości $y^2 - x^3 = 0$ mamy $K = 4E_1 + 2E_2 + E_3$, $C = -6E_1 - 3E_2 - 2E_3$.

Twierdzenie 9. Zachodzą następujące wzory:

$$C \cdot (C + K) = -2\delta.$$

$$K^2 = -n$$

$$K \cdot (K + D) = \nu.$$

dywizor to formalna kombinacja liniowa krzywych. Wbrew pozorom to pojęcie zasługuje na definicję.

Dowód pierwszych dwóch faktów jest klasyczny, dowód trzeciego jest indukcyjny po ilości gałęzi.

K jest klasą Cherna (przez dualność Poincaré) wiązki kostycznej na X . Równanie $E_k(K + E_k) = -2$ to twierdzenie Gaussa–Bonnetta. Istotnie, charakterystyka Eulera $E_k = 2$. $K + E_k$ można traktować (nieco oszukując) jako klasę Cherna wiązki kostycznej do E_k (dlatego, że styczna do X (ma klasę $-K$) minus normalna do E_k (ma klasę E_k) to styczna do E_k). Wzór $C(K + C) = -2\delta$ to w takim przypadku formuła Serre'a (1).

Fakt, że $K^2 = -n$ odzwierciedla znany fakt, że przy rozdmuchaniu $c_1^2(X)$ spada o 1. $K(K + D)$ jest charakterystyką Eulera pewnego snopa związanego z deformacjami, co pokazuje, że kowymiar nie jest wcale tak głupio zdefiniowany (wszystkie stałe $+1, -2$ itd. współgrają).

Klasę $(K + D) = K + C + E$ można zapisać również jako $H + N$, gdzie $N = \sum n_i E_i$, $H = \sum h_i E_i$, przy czym liczby n_i i h_i mogą być wymierne. Własności są takie, że $n_i \geq 0$, dla wszystkich i takich, że $n_i \neq 0$ mamy $H \cdot E_i = 0$ oraz $HE_j \geq 0$ w ogólności. Taki rozkład (być może nie podaję jakiegoś warunku, a i tak troszkę oszukuję) jest jednoznaczny. Nazywa się on rozkładem Zariskiego–Fujity klasy $K + D$. Możemy zdefiniować

$$(12) \quad \eta = -N^2, \quad M = \nu + \eta.$$

Dla osobliwości typu $y^2 - x^3$ mamy $\eta = 5/6$. Ogólnie, dla osobliwości z jedną gałęzią, $\eta > 1/2$, przy czym jest tym większe, im dłuższy jest ciąg Puiseux.

Ci dwaj panowie być może mieli szanse się spotkać

Interpretacja fizyczna: to się liczy

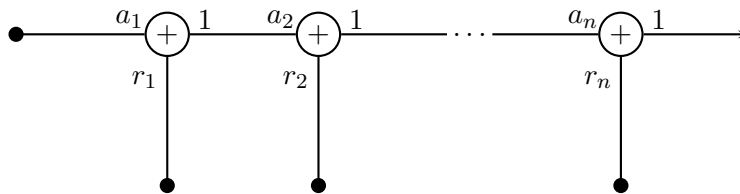
7. DIAGRAMY EISENBUDA–NEUMANNA

O ile diagramy rozdmuchania kodują pełną informację (topologiczną) o osobliwości, wyznaczenie ich jest dość kłopotliwe, nawet gdy już nabierze się wprawy w rozdmuchiwanie. Na szczęście istnieje dość prosta metoda wyznaczania innych diagramów punktów osobliwych, oraz algorytm przechodzenia od jednego do drugiego.

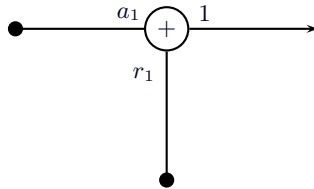
Zacznijmy od jednej gałęzi. Załóżmy, że mamy jedną gałąź z ciągiem charakterystycznym $(p; q_1, \dots, q_n)$. Niech p_1, \dots, p_n będą jak poprzednio zdefiniowane jako $p_0 = p$, $p_k = \text{nwd}(q_{k-1}, p_{k-1})$. Niech $r_k = p_k/p_{k+1}$ zaś s_k będzie określone ciągiem jako $s_1 = q_1$, $s_n = q_n - q_{n-1}$. Określmy w końcu $a_1 = s_1$, $a_k = a_{k-1}r_{k-1}r_k + s_k$.

Osobliwości przypiszemy następujący diagram.

Dużo tych oznaczeń, ale to jest przejście od jednej konwencji określania osobliwości, do innej



Wyjaśnienie poniższego obrazka jest dość skomplikowane i zawarte w [EN]. W skrócie, pojedynczy składnik typu



to nie ma nic wspólnego z geometrią toryczną

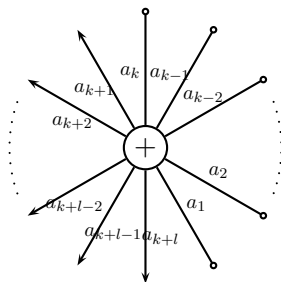
Symbolizuje węzeł toryczny, czyli taki, który można narysować na torusie i obchodzi on a_1 razy w jednym kierunku, zaś r_1 w drugim. '+' wewnątrz koła oznacza, że bierzemy węzeł dodatni, tj. taki, który ma wszystkie przecięcia na płaszczyźnie dodatnie.

Operację 'szepiania' pojedynczych diagramików interpretuje się jako 'okablowanie'. Dla dowolnego węzła $K \subset S^3$, jeśli weźmiemy jego otoczenie tubularne, $\nu(K)$, będzie ono homeomorficzne z pełnym torusem $S^1 \times D^2$. Na brzegu tego torusa możemy wziąć sobie węzeł $T_{p,q}$. Okablowanie polega na wyjęciu zbioru $\nu(K)$ z S^3 i wklejeniu kopii $S^1 \times D^2$ z wyróżnionym węzłem $T_{p,q}$. Otrzymujemy wtedy węzeł $K_{p,q}$, który nazywamy (p, q) -kablem na K . W szczególności, gdy K jest węzłem trywialnym, $K_{p,q} = T_{p,q}$.

W związku z tym diagram związany z punktem osobliwym o jednej gałęzi przedstawia (a_n, r_n) -kabel na (a_{n-1}, r_{n-1}) -kablem na \dots na (a_2, r_2) -kablem na węźle torycznym T_{a_1, r_1} . Tego typu węzeł nazywa się *iterowanym węzłem torycznym*.

Jak ten węzeł zobaczyć na osobliwości? Bardzo prosto. Bierzymy krzywą C osobliwą w z_0 i ustalamy ε tak małe, żeby $S(z_0, \varepsilon)$ przecinało C transwersalnie. Jeśli C ma jedną gałąź to $C \cap S(z_0, \varepsilon)$ jest węzłem i to właśnie takim, jak na diagramie. Dowód tego faktu zawarty jest w [EN]. Jest to chyba najcięższy fragment z tej swojej drogą miłej i przyjemnej lekturki.

W przypadku większej liczby gałęzi, diagram może wyglądać nieco bardziej skomplikowanie. W ogólności jest on złożeniem (dosłownie szepieniem, po angielsku *splice*) diagramów postaci



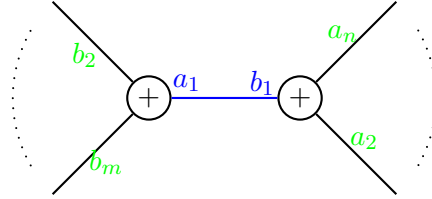
Przy czym $a_i = 0, 1, \dots$ oraz łączymy dwie strzałki tworząc z nich krawędź. Zawsze zakładamy, że $k + l \neq 0, 2$, natomiast poza szczególnymi przypadkami zakładamy również, że $k + l \neq 1$.

Definicja 31. Diagram składający się z kawałków takich, jak wyżej, szepionych strzałkami i niemający pętli nazwiemy diagramem szepienia albo diagramem Eisenbuda–Neumanna. Dalej będziemy go nazywać po prostu diagramem.

Wierzchołki diagramu mogą być trzech typów. Pierwszy to wierzchołki \oplus . Na diagramie rozdmuchania odpowiadają one wierzchołkom o co najmniej 3 odstających krawędziach. Wierzchołki \bullet odpowiadają wierzchołkom na diagramie rozdmuchania o 1 krawędzi, zaś

wierzchołki ze strzałkami odpowiadają strzałkom. W pewien sposób wagi przy krawędziach kodują w diagramie rozdmuchania ilość wierzchołków o dwóch krawędziach.

Niezależnie od powiązań z osobliwościami, każdy diagram bez pętli reprezentuje pewien spłot. Jeśli przy każdym wierzchołku co najwyżej dwie wagi spośród a_1, \dots, a_{k+l} są różne od 1, spłot ten jest spłotem w S^3 (w innym przypadku niekoniecznie). Ważnym elementem jest tzw. wyznacznik krawędzi w diagramie. Mianowicie, niech dany będzie diagram.



Definicja 32. Wyznacznikiem krawędzi diagramu oznaczonej na niebiesko nazywamy wielkość

$$a_1 b_1 - a_2 \cdot \dots \cdot a_n \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_m.$$

Mamy następujące twierdzenie, które podamy bez dowodu

Twierdzenie 10. Diagram jest diagramem pewnej osobliwości wtedy i tylko wtedy, gdy wyznaczniki wszystkich krawędzi są dodatnie.

Diagram E-N można wyznaczyć dość łatwo nawet dla skomplikowanych osobliwości. Z drugiej strony, wiele niezmienników liczy się dość łatwo z tego diagramu. Dla przykładu odczytamy kowymiar.

Niech więc $\bar{W}(\Gamma)$ będzie diagramem, v_1, \dots, v_k wierzchołkami oznaczonymi $+$. Ponadto ν_1, \dots, ν_k niech będą krotnościami wierzchołków, zaś $p_{j1}, \dots, p_{j\nu_j}$ wagami przy krawędziach. Przypuśćmy też, że krawędzie odpowiadające p_{j1}, \dots, p_{jl_j} ($l_j \leq \nu_j$) mają jako swój drugi koniec kulkę \bullet . Określmy

$$\bar{W}(\Gamma) = \sum_{j=1}^k (\nu_j - 2) \cdot \left(p_{j1} \cdot \dots \cdot p_{j\nu_j} - \sum_{s=1}^{l_j} \left[\frac{p_{j1} \cdot \dots \cdot \widehat{p_{js}} \cdot \dots \cdot p_{j\nu_j}}{p_{js}} \right] \right).$$

Oraz

$$W(\Gamma) = \sum_{j=1}^k (\nu_j - 2) \cdot \left(p_{j1} \cdot \dots \cdot p_{j\nu_j} - \sum_{s=1}^{l_j} \frac{p_{j1} \cdot \dots \cdot \widehat{p_{js}} \cdot \dots \cdot p_{j\nu_j}}{p_{js}} \right).$$

Przypuśćmy, że nasz diagram jest diagramem osobliwości o n gałęziach C_1, \dots, C_n i liczba Milnora każdej, pojedynczej gałęzi wynosi $\mu_i = \mu(C_i)$.

Twierdzenie 11. Przy tych oznaczeniach $\nu = \bar{W}(\Gamma) - \sum \mu_i$, zaś $M = W(\Gamma) - \sum \mu_i$ (zob (12)).

Liczby Milnora μ_i też można wyznaczyć z diagramu, ale jest to trudniejsze.

8. SYGNATURY TRISTRAMA–LEVINE’A

Niech L będzie splotem w S^3 . Wiadomo (to jest takie twierdzenie) (zob. [Ka]), że istnieje spójna zorientowana powierzchnia $\Sigma \subset S^3$ taka, że $\partial\Sigma = L$. Taką powierzchnię nazwiemy *powierzchnią Seiferta* dla L . Nie jest ona wyznaczona jednoznacznie.

Dla powierzchni Seiferta Σ , niech $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ będzie dowolną bazą $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$. Niech α_j^+ oznacza krzywą α_j zsuniętą z Σ w kierunku dodatnim (jeśli Σ jest zorientowana, to wiązka normalna $N\Sigma$ też). Oznaczmy przez $S = \{s_{ij}\}_{i,j=1}^k$ macierz taką, że $s_{ij} = lk(\alpha_i, \alpha_j^+)$ (lk oznacza indeks zaczepienia). Wtedy S nazwiemy macierzą Seiferta. Macierz Seiferta również nie jest jednoznacznie wyznaczona, np. zależy od wyboru bazy, ale można z niej wyciągnąć wiele niezmienników węzła.

Dla przykładu, ustalmy $\zeta \in \mathbb{C}$ pewną liczbę zespoloną taką, że $|\zeta| = 1$. Niech

$$M(\zeta) = (1 - \zeta)S + (1 - \bar{\zeta})S^T$$

będzie formą hermitowską.

Definicja 33. Sygnaturę $\sigma(\zeta)$ formy $M(\zeta)$ nazwiemy *sygnaturą Tristrama–Levine’a* [Tr, Le] splotu L .

Sygnatura jest kawałkami stałą funkcją o wartościach całkowitych. Jest ważnym niezmiennikiem tzw. kobordyzmu węzłów [Mur].

Z punktu widzenia węzła algebraicznego, sygnaturę Tristrama–Levine’a liczy się (niezależnie od jej definicji podanej wyżej) w sposób bardzo prosty [Li] (zobacz też [Neu1, Neu2]).

Zacznijmy od splotu osobliwości zadanej przez $\{x^m - y^n = 0\}$, gdzie m i n wyjątkowo nie muszą być względnie pierwsze. Niech dla $k > 1$, Δ_k będzie zbiorem liczb postaci i/k dla $i = 1, \dots, k - 1$, zaś Σ_{mn} sumą algebraiczną $\Delta_m + \Delta_n$.

Twierdzenie 12. Dla prawie wszystkich $\zeta = e^{2\pi i x}$ dla $x \in (0, 1)$ zachodzi

$$\sigma(\zeta) = \#\Sigma_{mn} \setminus (x, x + 1) - \#\Sigma_{mn} \cap (x, x + 1).$$

W szczególności znamy funkcję sygnatury dla węzła torycznego. Aby obliczyć sygnaturę w ogólności dla iterowanego węzła torycznego skorzystamy z następującego lematu

Lemat 4. Niech K będzie węzłem i $K_{p,q}$ (p, q)–kablem na K . Wtedy dla każdego $\zeta \in \mathbb{C}$, $|\zeta| = 1$, zachodzi

$$\sigma_{K_{p,q}}(\zeta) = \sigma_K(\zeta^q) + \sigma_{T_{p,q}}(\zeta).$$

Tak jak w [Bo1] można policzyć całkę z funkcji $x \rightarrow \sigma(e^{2\pi i x})$.

Lemat 5. Dla węzła torycznego $T_{p,q}$ całka z powyższej funkcji wynosi $-\frac{1}{3}(p - \frac{1}{p})(q - \frac{1}{q})$.

Jeśli połączymy dwa lematy, wyjdzie nam, że całka z funkcji sygnatury dla (a_n, r_n) kabla na \dots na (a_1, r_1) węzle torycznym wynosi

$$-\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left(p - \frac{1}{p}\right) \left(q - \frac{1}{q}\right).$$

Porównanie tej wartości z M -liczbą przynosi zaskakujący wniosek.

Twierdzenie 13. Dla węzła punktu osobliwego osobliwości z jedną gałęzią o M liczbie równej M zachodzi

$$(13) \quad 0 < -3 \int_0^1 \sigma(e^{2\pi i x}) dx - M < \frac{2}{9}.$$

9. WĘZEL W NIESKOŃCZONOŚCI

Ogólnie splot krzywej w nieskończoności to splot $C \cap S(0, R)$ dla R dostatecznie dużego (S oznacza sferę S^3 o zadanym środku i promieniu). Da się go opisać za pomocą diagramu Eisenbuda–Neumanna, ale z *ujemnymi* wyznacznikami.

10. PROBLEMY

- 1 Obliczyć całkę z funkcji sygnatury Tristrama–Levina dla splotu algebraicznego (korzystając np. z [Neu1, Neu2]) i porównać ją z niezmiennikami osobliwości tak, jak [Bo1] dla węzłów.
- 2 Udowodnić twierdzenie Zajdenberga–Lina korzystając z oszacowania sygnatur Tristrama–Levina jak w [Bo3].
- 3 Zdefiniować kowymiar dla osobliwości krzywej w nieskończoności, tak aby
 - dał się powiązać z całką z funkcji sygnatury (na początek dla węzła)
 - dał się wyliczyć z diagramu Eisenbuda–Neumanna
 - Oszacowania na kowymiar w stylu [BZ3] dały się ładnie zapisać
- 4 Udowodnić hipotezę Lina o tym, że krzywa $C \subset \mathbb{C}^2$, mająca pierwszą liczbę Bettiego b , ma co najwyżej $2b + 1$ punktów osobliwych. Plan ataku jest naszkicowany w [Bo4].

LITERATURA

- [Bo1] M. Borodzik, *A rho-invariant of iterated torus knots*. preprint, arxiv 0906:3660.
- [Bo2] M. Borodzik, *An efficient method of finding a Puiseux expansion of a parametric singularity* preprint, arxiv:0911:1885.
- [Bo3] M. Borodzik, *Morse theory for plane algebraic curves*. preprint.
- [Bo4] M. Borodzik, *Number of singular points of a genus g curve with one point at infinity*, preprint, arxiv:9008.4500
- [BZ1] M. Borodzik, H. Żołądek *Complex algebraic plane curves via the Poincaré–Hopf formula. I. Parametric lines*. Pacific J. Math. **229** (2007), no. 2, 307–338.
- [BZ2] M. Borodzik, H. Żołądek *Complex algebraic plane curves via the Poincaré–Hopf formula. II. Parametric annuli*. to appear in Israeli J. Math.
- [BZ3] M. Borodzik, H. Żołądek *Complex algebraic plane curves via Poincaré–Hopf formula. III. Codimension bounds*, to appear in J. Math. Kyoto Univ.
- [EN] D. Eisenbud and W. Neumann, *Three-dimensional link theory and invariants of plane curve singularities*, Annals Math. Studies **110**, Princeton University Press, Princeton, 1985.
- [Ka] L. Kauffman, *On knots*, Annals of Mathematical Studies 115, Princeton University Press, Princeton 1987.
- [Le] J. Levine, *Knot cobordism groups in codimension two*, Comment. Math. Helv. **44** (1969), 229–244.
- [Li] R. A. Litherland, *Signatures of iterated torus knots* in *Topology of low-dimensional manifolds* (Proc. Second Sussex Conf., Chelwood Gate, 1977), pp. 71–84, Lecture Notes in Math., **722**, Springer, Berlin, 1979.
- [Mur] K. Murasugi, *On a certain numerical invariant of link types*, Trans. Amer. Math. Soc. **117**(1965), 387–422.
- [Nem1] A. Némethi, *On the spectrum of curve singularities*, Singularities (Oberwolfach, 1996), 93–102, Progr. Math., 162, Birkhäuser, Basel, 1998.
- [Neu1] W. D. Neumann, *Invariants of plane curve singularities*, in: „Knots, braids and singularities” (Plans-sur-Becs, 1982), 223–232, Monogr. Enseign. Math., **31**, Enseignement Math., Geneva, 1983.

- [Neu2] W. D. Neumann, *Splicing algebraic links*, Adv. Stud. Pure Math. **8** (1986), 349–361.
- [Neu3] W. D. Neumann, *Complex algebraic plane curves via their links at infinity*, Invent. Math. **98** (1989), 445–489.
- [NeRu] W. D. Neumann, L. Rudolph, *Unfolding in knot theory*, Math. Ann. **278** (1987), 409–439; *Corrigendum to “Unfoldings in knot theory”*, Math. Ann. **282** (1988), 349–351.
- [Rud1] L. Rudolph, *Some knot theory of complex affine curves*, L’Enseign. Math. **29** (1983), 185–208; (new version: arXiv:math.GT/0106058).
- [Rud2] L. Rudolph, *Knot theory of complex plane*, Handbook of knot theory, 349–427, Elsevier, Amsterdam, 2005.
- [Tr] A. G. Tristram, *Some cobordism invariants for links*, Proc. Cambridge Philos Soc. **66** (1969), 251–264.