$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}\dot{x} + a_n x = 0$$

$a_1, \dots, a_n$ - stałe.

$$\dot{x} + ax = 0 \quad \text{lub} \quad \dot{x} + ax = f$$

$$\Updownarrow$$

$$(D + aI)x = 0 \qquad D = \frac{d}{dt}x$$

I = identyczność

quasiwielomian $p(t)e^{\lambda t}$, gdzie
p wielomian, $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\downarrow$$

$$e^{\mathrm{Re}\,\lambda t} \cos \mathrm{Im}\,\lambda t$$
$$+ e^{\mathrm{Re}\,\lambda t} \sin \mathrm{Im}\,\lambda t$$

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$$

$$\left(D^2 + aD + bI\right)x = 0$$

$$\left(D + a_1\right)\left(D + a_2\right)x = 0$$

równanie pomocnicze

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad (*)$$

Niech a_1, a_2 pierwiastki $(*)$.

wtedy

$$\left(D + a_1\right)\left(D + a_2\right) = \left(D^2 + aD + b\right)$$

$$\left(D + a_1\right)\left(D + a_2\right) = D^2 + D \cdot a_2 + a_1 D + a_1 a_2$$

$$= D^2 + a_2 D + a_1 D + a_1 a_2 =$$

$$= D^2 + \left(a_1 + a_2\right)D + a_1 a_2 = D^2 + aD + b.$$

$$D a_2 = a_2 D.$$

a_2 - mnożenie przez liczbę (a_2)

D różniczkowanie

$$(a_2 f)' = a_2 \cdot f'$$

To działa dlatego, że a_2 jest liczbą.

Gdyby a_2 była funkcją, to

mielibyśmy a_2 i pysznie, bo

$$D a_2 f = \frac{d}{dt} a_2 f = a_2' f + a_2 f'$$

$$a_2 D f = a_2 f'$$

$$(D+a_1)(D+a_2)x = 0. \qquad (**)$$

1. $a_1 \neq a_2$

x - quasiwielomian

albo $x \in \ker(D+a_2) \Rightarrow$

$$x = Ce^{-a_2 t}$$

albo nie.

Jeśli nie, ale x spełnia $(**)$, to

$(D+a_2)x \in \ker(D+a_1)$.

co oznacza, że $(D+a_2)x = C_2 e^{-a_1 x}$.

co możemy powiedzieć o x?

x spełnia $(D+a_2)x = C_2 e^{-a_1 x}$

Jeśli $a_2 \neq a_1$, to

$(D+a_2)$ jest izomorfizmem na przestrzeni quasiwielomianów stopnia 0 i o wykładniku $-a_1$.

To oznacza, że $\forall\, c_2 e^{-a_1 x}$

$$\exists\, c_2' : \ (D+a_2) \cdot c_2' e^{-a_1 x} = c_2 e^{-a_1 x}.$$

Czyli przestrzeń rozwiązań (**) jest rozpięta przez quasi wielomiany

$$e^{-a_1 x}, \ e^{-a_2 x}$$

$$(D+a_1)(D+a_1)\,x=0$$

$a=-\mu$:

$$(D+aI)\, t^k e^{\mu t} = k t^{k-1} e^{\mu t}$$

na bazie $(e^{\mu t}, te^{\mu t}, t^2 e^{\mu t}, \dots)$

ten operator działa:

$$(e^{\mu t}, te^{\mu t}, t^2 e^{\mu t}, \dots)$$

$\cdot 0 \quad \cdot 1 \quad \cdot 2 \quad \cdot 3$

$$(D+a_1)(D+a_1)\,x=0 \iff$$

$$(D+a_1)\,x \in \ker(D+a_1).$$

$$\ker(D+a_1) = C\cdot e^{-a_1 t}$$

$$\Downarrow$$

$$(D+a_1)\,x = Ce^{-a_1 t} \rightsquigarrow$$

$$x = Ce^{-a_1 t} + x_0$$

$$\in \ker(D + a_1).$$

to oznacza, że

przestrzeń rozwiązań równania

$$(D + a_1)(D + a_1)x = 0$$

jest rozpięta przez $e^{-a_1 t}$, $te^{-a_1 t}$

$$(D + a_1)^k x = 0 \qquad k > 2.$$

przestrzeń rozwiązań to

$$e^{-a_1 t}, te^{-a_1 t}, \ldots, t^{k-1} e^{-a_1 t}$$

$$(D + a_1)^{k_1} \cdots (D + a_n)^{k_n} x = 0$$

$$a_i = a_j \iff i = j.$$

$$(D+a_j)^{k_j} x = 0 \Rightarrow$$

$$x \in \operatorname{span}\left(e^{-a_j t}, \dots, t^{k_j-1} e^{-a_j t}\right) =: A_j .$$

Jeśli $x \in A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n$, to

$x \in \ker (D+a_1)^{k_1} \dots (D+a_n)^{k_n}$

Dla $i \neq j$ mamy $(D+a_i)^{k_i} : A_j \xrightarrow{\text{izo}} A_j$.

$$\to (D+a_n)^{k_n} : A_1 \oplus \dots \oplus A_n \to$$

$$\to A_1 \oplus \dots \oplus A_{n-1}, \quad A_n \to 0 .$$

$$(D+a_{n-1})^{k_{n-1}} : A_1 \oplus \dots \oplus A_{n-1} \to A_1 \oplus \dots \oplus A_{n-2}$$

Jeśli $x \in \ker (D+a_1)^{k_1} \dots (D+a_n)^{k_n}$, to

$x \in A_1 \oplus \dots \oplus A_n$

Jeśli $x \in \ker(D+a_1)^{k_1} \Rightarrow x \in A_1$.

Jeśli $x \in \ker (D+a_1)^{k_1}(D+a_2)^{k_2}$, to

$x \in A_1 \oplus A_2$ itd.

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}x' + a_n x = 0$$

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

/równanie pomocnicze

równanie charakterystyczne/.

rozwiążujemy, przypuśćmy, że ma

pierwiastki $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ z

krotnościami $k_1, \dots, k_s$.

wtedy

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) =$$

$$= (D-\lambda_1)^{k_1} (D-\lambda_2)^{k_2} \dots (D-\lambda_s)^{k_s}.$$

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = 0$$

$\{\dot{x} = y\}$ podstawienie

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} + a_1 y + a_2 x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -a_2 & -a_1 - \lambda \end{pmatrix} =$$

$= \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$ mamy mamy.

to jest dokładnie nasze równanie pomocnicze.

A to samo zachodzi dla wszystkich rzędów

Przypuśćmy, że równanie charakterystyczne ma podwójny pierwiastek.

Jakiego wymiaru ma klatka Jordana macierz A?