Wykład 6.

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n$$

$$y' = F(x,y), \quad F: (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$$

przypuśćmy, że F jest ciągła

$$x_0, y_0 \in (a,b) \times \Omega$$

$$T: X \to X, \quad \varepsilon, \delta > 0$$

$$X = \{ y : [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \to \overline{B}(y_0, \delta) \}$$

$$Ty(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(x, y(x)).$$

$$M = \sup |F(x,y)| \text{ na } [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \times \overline{B}(y_0, \delta)$$

$$\varepsilon < M\delta$$

$$\Downarrow$$

T istotnie przeprowadza $X \to X$.

F na zbiorze zwartym

$$[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon] \times \overline{B(y_0,\delta)}$$

jest ciągła, a więc jednostajnie ciągła.

$\forall \vartheta > 0 \ \exists \eta > 0 : \|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\| < \eta,$

to $|F(x_1,y_1) - F(x_2,y_2)| < \vartheta.$

Jeśli funkcje $y_1(x)$ i $y_2(x) \in X$

i ε, δ odpowiednio małe, to

Ty_1 i Ty_2 są jednakowo ciągłe.

To będzie dobre (mniej więcej)

Niech, jak poprzednio M oznacza

sup |F|.

$$|T_y(x) - T_{y'}(x')| \leq M|x-x'|$$

$\forall \vartheta > 0 \ \exists \eta > 0 : \forall x, x' \in [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$

i $\forall y \in X$

$|Ty(x) - T_y(x')| < \vartheta$ jeśli

tylko $|x-x'| < \eta$ $\left(\eta = \frac{\vartheta}{M} \right)$

To oznacza, że $T: X \to X$

jest **ciągły** to znaczy przeprowadza

zbiory ograniczone w zbiory, których domknięcie jest zwarte.
(tw Arzeli - Ascolego).

$y(x) \in X$, na przykład $y(x) \equiv y_0$

Ty, $T^2 y = T(Ty)$, $T^3 y$ ..., ..

ciąg elementów z X. one są, tak naprawdę, z TX.

$\Rightarrow$ z ciągu $y_j = T^j y$ można

wybrać podciąg zbieżny.

Niech $\bar{y}$ będzie granicą,

wtedy $T\bar{y} = \bar{y}$ / zostawiamy

do sprawdzenia /

To oznacza, że T ma punkt stały.

Czyli $y' = F(x, y(x))$ ma rozwiązanie

nieskończenie jedyne.

(Udowodniliśmy twierdzenie Peano

o istnieniu)

Przykład:

$$y' = x + y^2 \qquad y(0) = 0.$$

$$y_0(x) \equiv 0.$$

$$y_1(x) = Ty_0 = 0 + \int_0^x s + y_0^2(s)\, ds =$$

$$= \frac{1}{2} x^2$$

$$y_2(x) = Ty_1 = 0 + \int_0^x s + \frac{1}{4} s^4 \, ds =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{20}x^5.$$

$$y_3(x) = \int_0^x s + \left(\frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{20}s^5\right)^2 ds = \square$$

$y_0, y_1, y_2, \ldots$ zbiegają do rozwiązania

to jest jedna z metod konstrukcji

rozwiązania przybliżonego.

$$y' = F(y) \qquad F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$y(0) = y_0.$$

Przypuśćmy, że F jest analityczna wokół 0.

Tw. równanie $y' = F(y)$ jest analityczne w otoczeniu 0

(tw. Cauchy'ego)

Zarys idei dowodu..

$y_0 = 0$

$$F(y) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j y^j$$

$y(0) = y_0 \quad a_0 = y_0 = 0$

szukamy $\quad \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = y(x)$

a_i ;

$$\sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1} = \sum_{j=0}^{\infty} f_j \left(\sum a_i x^i\right)^j.$$

wygląda źle, ale wyrażenie po

prawej stronie przy x^s zależy

tylko od $a_1 \ldots, a_s$. a po prawej

przy x^s stoi a_{s+1}

to znaczy, że współczynniki a_s

można wyliczać rekurencyjnie.

to jest łatwa część,

Trudna część (pominięta):

Szacowanie na współczynnik.

nie jest zupełnie trywialne,

jeśli oznaczymy przez R promień

zbieżności szeregu $\sum f_i y^i$

Szczegóły w literaturze.

Założenie

$u'(t) \leq \beta(t) u(t)$

β ciągła, u różniczkowalna

na $[a,b]$.

Teza (nierówność Gronwalla)

$\forall t \in [a,b)$

$$u(t) \leq u(a) \exp\left(\int_a^t \beta(s)\,ds\right)$$

D: określmy

$$y(t) = \exp\int_a^t \beta(s)\,ds$$

$$y'(t) = \beta(t) y(t)$$

$$\left(\frac{u}{y}\right)' = \frac{u'y - y'u}{y^2} =$$

$$= \frac{u'y - \beta y u}{y^2} = \frac{u' - \beta u}{y} \leq$$

$$\leq \frac{\beta u - \beta u}{y} = 0.$$

więc $\quad \frac{u}{y}(t) \leq \frac{u}{y}(a)$

a zatem

$$u(t) \leq \left(\exp \int_a^t \beta(s)\,ds\right) \cdot u(a).$$

Hard core:

F klasy C^1

$y' = F(x, y(x))$ $\delta, \varepsilon > 0$ $y(x_0) = y_0$

$T_0 : \overline{B}(\hat{y}_u, \delta) \to \overline{D}(\hat{y}_u, \delta)$ jest

kontrakcją ze stałą $L > 0$, $L < 1$.

Jeśli $\mathcal{F} : U \xrightarrow{\subset \mathbb{R}^n} Map^1(X, X)$

jest 1) klasy C^1

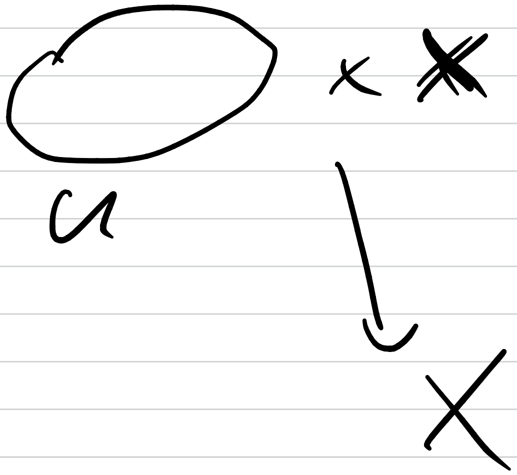
2) $\mathcal{F} : 0 \to T_0$.

Wtedy istnieje otoczenie U_0 punktu 0 w U

oraz odwzorowanie klasy C^1 z U_0 do

X, oznaczone przez φ, że:

$T_u Y_u = Y_u$ dla wszystkich $u \in U$.



Dowód: Rozpatrujemy: $(T_u - Id)$.

$$(U \times X) \xrightarrow{T_u - I_d} \text{funkcja klasy } C^1$$

wiemy: TFU. na $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$.

$(T_0 - I)y = 0$. $(T_u - I)y_u = 0$

Sprawdzamy założenia.

$U \times X \longrightarrow$ funkcja gładka

$T_u - I$

Musi być tak, że T_0 ma odwracalną

pochodną.

DT_0 jej pochodna.

Jeśli T_0 jest kontrakcją,

to $\|DT_0\| \leq L < 1$.

z definicji pochodnej.

Pochodna $T_0 - I$ jest równa.

$DT_0 - \mathbb{1}$

Jest taki lemat, że jeśli
$\|A\| < 1$, to $1-A$ jest odwracalna.

macierz odwrotna to $1 + A + A^2 + \ldots + A^n + \ldots$
i $\|A\| < 1$ gwarantuje zbieżność szeregu.

Koniec szkicu argumentu o gładkiej
zależności

Układy liniowe o
stałych współczynnikach.

$y_0(0) = 0$

$$y' = a y \quad \rightsquigarrow \quad y = e^{ax} \cdot y_0$$

A macierz $n \times n$

$$y' = Ay \quad \rightsquigarrow \quad y = e^{Ax} y_0$$

Aby rozwiązać równanie liniowe, musimy zdefiniować e^A.

(ogólniej później: e-do-operatora).

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots$$

spróbujmy tak samo:

$\mathbb{R}^{n\times n}$ $\mathbb{R}^{n\times n}$

$$e^A = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

$$\left\| 1 + A + \dots + \frac{A^n}{n!} \right\| \le 1 + \|A\| + \frac{\|A^2\|}{2!} + \dots + \frac{\|A^n\|}{n!} \le \dots$$

Weźmiemy normę w $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

indukowana z dowolnej normy w $\mathbb{R}^n$

ta norma ma własność taką, że

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

$$\Downarrow$$

$$\|A^n\| \leq \|A\|^n.$$

$$\leq \quad 1 + \|A\| + \frac{\|A\|^2}{2!} + \dots + \frac{\|A\|^n}{n!}$$

To samo oszacowanie mówi, że

ogon szeregu:

$$\left\| \frac{A^n}{n!} + \dots + \frac{A^m}{m!} \right\| \leq$$

ogon szeregu liczącego $e^{\|A\|}$.

Więc jest zbieżny na całej prostej.

to oznacza, że ciąg sum częściowych

$$e^A = Id + A + \frac{A^2}{2!} + \dots$$

jest ciągiem Cauchy'ego i ma granicę

—

Uwaga: Jeśli A diagonalna, to

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ to}$$

$$\underline{e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A więc

$$e^{A} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} & 1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{8!} + \dots \\ 1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \dots & 1 + \frac{1}{2!} + \dots \end{pmatrix}$$

e^{AB} nie musi być równe e^{BA}.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ lub tp.}$$

$e^{A+B} \neq e^{A} e^{B}$ na ogół. $\square$

$\square$ obliczyć $e^{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & 0 & \lambda \end{pmatrix}}$.

Folit

$$e^{CAC^{-1}} = C e^{A} C^{-1};$$

$$e^{CAC^{-1}} = Id + CAC^{-1} + \frac{(CAC^{-1})^2}{2!} + \dots$$

$$+ \dots \frac{(CAC^{-1})^n}{n!} + \dots = C Id C^{-1} + CAC^{-1} +$$

$$+ \frac{CA^2C^{-1}}{2!} + \dots + \frac{CA^nC^{-1}}{n!} + \dots =$$

$$= C\left(Id + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots\right)C^{-1} =$$

$$= C e^{A} C^{-1}$$

Ulepszony algorytm podnoszenia e^A:

1) znaleźć wartości własne
2) znaleźć postać Jordana
3) podnieść postać Jordana.

Inny algorytm (szybszy).

Przypuśćmy, że A ma ~~różne~~ różne wartości własne $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Niech $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ będą takimi liczbami, że

$$a_0 + a_1\lambda_i + a_2\lambda_i^2 + \ldots + a_{n-1}\lambda_i^{n-1} = e^{\lambda_i}$$

dla $i = 1 \ldots n$

Inaczej mówiąc, szukamy wielomianu stopnia $n-1$ $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$ takiego, że $P(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$.

Teraz:

$$e^A = a_0 \cdot Id + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_{n-1} A^{n-1}$$

Uzasadnienie:

Oczywista prawda jak A diagonalna i zachowuje się przy sprzężeniu.

Jeśli wartość własna λ_i powtarza się k-krotnie, to do warunku $P(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$ dokładamy warunki

$p'(\lambda_i) = e^{\lambda_i} \quad \sim \quad p^{(k-1)}(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$.