Wykład 5.

$F: \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

o tej własności, że $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$

rozwiązanie układu

$$\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

jest określone na całej prostej

oraz F jest klasy C^1.

—

Dla x_0, y_0 i x_1.

oznaczamy przez $\Phi_{x_0, x_1}(y_0)$ punkt y_1

o tej własności, że: jeśli $\begin{matrix} y' = F(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{matrix}$, to $y(x_1) = y_1$

$\varphi(y_0)\Big|_{x_0}^{x_1}$ lub $\varphi_{x_0}^{x_1}(y_0)$ inne oznaczenie.

Uwaga:

$$\varphi_{x_1,x_2}\left(\varphi_{x_0,x_1}(y_0)\right) = \varphi_{x_0,x_2}(y_0)$$

$$y' = F(x,y)$$

1. $y(x_0) = y_0$

$y(x_1) = y_1$

to $y(x_1) = y_1 = \varphi_{x_0,x_1}(y_0)$

$y(x_2) = \varphi_{x_1,x_2}(y_1)$

$y(x_2) = y_2 = \varphi_{x_0,x_2}(y_1)$

2. Jednoznaczność rozwiązania

zachodzi $\varphi_{x_1,x_2}(y_1) = y_2$.

Przypuśćmy, że $F(x,y)$ zależy tylko od y.

$$\varphi_{x_0,x_1}(y_0) = \varphi_{0,x_1-x_0}(y).$$

$$y' = F(y).$$

$$y(x_0) = y_0 \qquad \bar{y}(0) = y_0$$

$$y(x_1) =$$

$$= y_1 = \varphi_{x_0,x_1}(y_0)$$

$$\check{y}(x) = \bar{y}(x+x_0)$$

$$\check{y}(x)' = \bar{y}(x+x_0)' = F(\bar{y}(x+x_0)) =$$

$$= F(\check{y}(x))$$

$\check{y}$ spełnia $y' = F(y)$.

z warunkiem początkowym $\check{y}(x_0) = y_0$

$$\check{y}(x_1) = y_1 = \bar{y}(x_1 - x_0) = \varphi_{0,x_1-x_0}(y_0)$$

Dalej zakładam, że $F = F(s)$

$$\varphi_{x_0,x_1} = \varphi_{0,x_1-x_0} \overset{\text{ozn}}{=} \varphi_{x_1-x_0}$$

$$\varphi_{x_1,x_2} \circ \varphi_{x_0,x_1} = \varphi_{x_0,x_2}.$$

$$\parallel$$

$$\varphi_{x_2-x_1} \circ \varphi_{x_1-x_0} = \varphi_{x_2-x_0}$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$$

Uwaga: φ_{x_0,x_1} (niezależnie od tego, czy $F = F(s)$, czy $F = F(x,s)$), jest dyfeomorfizmem.

$$\varphi_{x_0,x_1} \circ \varphi_{x_1,x_0} = \varphi_{x_0,x_0} = id.$$

$y' = F(x,y)$

$y(x_0) = y_0$

$\Downarrow$

$y(x)$ rozwiązanie.

$y' = F(x,y)$

$\Downarrow$

$\varphi_{t,s} : \Omega \to \Omega.$

$y' = F(y)$

$\varphi_t : \Omega \to \Omega.$

$\mathbb{R} \to Diff(\Omega)$

Def: krzywą fazową (c. całkową)

phase curve, integral curve układu

$y' = F(x,y)$ lub $y' = F(y)$

nazywamy krzywą $(x, y(x))$ lub $(y(x))$

dla $x \in \mathbb{R}$ $\quad y'(x) = F(x,y)$ $\quad y'(x) = F(y)$

w przestrzeni $\mathbb{R} \times \Omega$ lub Ω.

Tę przestrzeń nazywamy rozszerzoną przestrzenią fazową $(\mathbb{R} \times \Omega)$ albo przestrzenią fazową (Ω).

Przykład:

$$\dot{x} = -y \qquad \varphi_t$$
$$\dot{y} = x$$

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{1}{r}(x\dot{x} + y\dot{y}) = \frac{1}{r}(-xy + xy) = 0 \\ \dot{\varphi} = \frac{1}{r^2}(\dot{y}x - \dot{x}y) = \frac{1}{r^2}(x^2 + y^2) = 1. \end{cases}$$

$$\dot{r} = 0$$
$$\dot{\varphi} = 1$$

$$r(0) = r_0 \quad , \text{tn} \quad r(t) = r(0) = r_0$$

$$\varphi(0) = \varphi_0 \qquad \varphi(t) = \varphi_0 + t.$$

$$(x_0, y_0) = (r_0 \cos\varphi_0 , r_0 \sin\varphi_0)$$

tn

$$\varphi_t(x_0, y_0) = (r_0 \cos(\varphi_0 + t) , r_0 \sin(\varphi_0 + t)) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_t = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = -y \cdot t$$
$$\dot{y} = x \cdot t$$

$$\dot{r} = 0$$

Teilí $r(t_0) = r_0$, t_0

$$\dot{\varphi} = t \qquad \varphi(t) = \frac{t^2}{2} + C \qquad \varphi(t_0) = \varphi_0$$

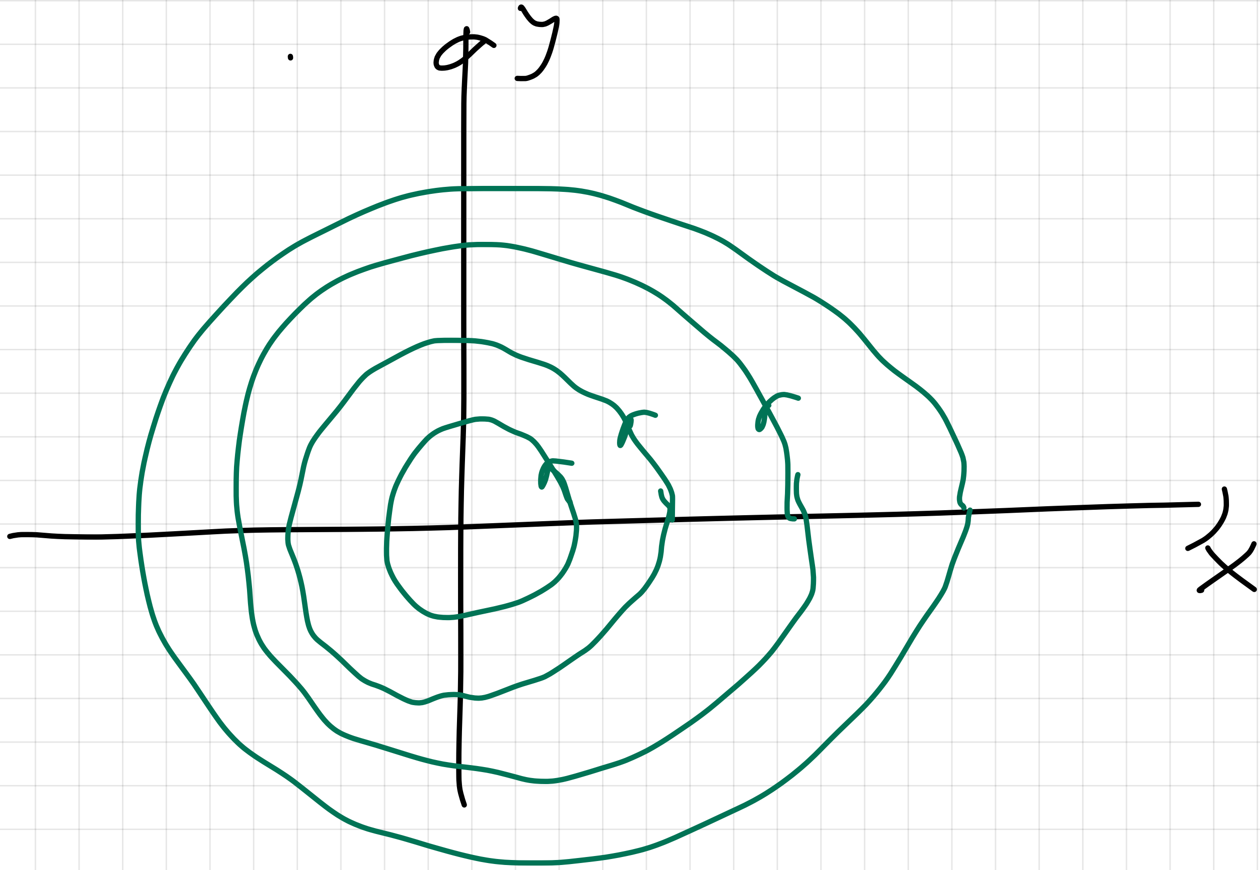
$$r(t_1) = r_0$$

$$\frac{t_0^2}{2} + C = \varphi_0$$

$$C = \varphi_0 - \frac{t_0^2}{2}.$$

$$\varphi(t_1) = \varphi_0 + \frac{t_1^2}{2} - \frac{t_0^2}{2}.$$

$$\varphi_{t_0, t_1} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{t_1^2}{2} - \frac{t_0^2}{2}\right) & \sin\left(\frac{t_1^2}{2} - \frac{t_0^2}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{t_1^2}{2} - \frac{t_0^2}{2}\right) & \cos\left(\frac{t_1^2}{2} - \frac{t_0^2}{2}\right) \end{pmatrix}$$



$\dot{r} = 0$. $\Rightarrow$ ruch odbywa się po poziomicach funkcji F.

Definicja: Funkcję $G : \Omega \to \mathbb{R}$ klasy C^1 nazwiemy całką pierwszą układu $y' = F(x, y)$, jeśli $\forall$ rozwiązania $y(x)$ zachodzi

$$\frac{d}{dx} G(y(x)) \equiv 0.$$

Przykład. Niech $U: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie klasy C^2. Rozpatrujemy układ:

$$m\ddot{x} = -U'(x) \qquad m>0$$

$$(*) \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -U'(x) \end{cases}$$

Funkcja $H = \frac{y^2}{2} + U(x)$ jest całką pierwszą.

Dowód: $x(t), y(t)$, rozwiązanie $(*)$.

$$\frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) = \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y} =$$

$$= U'(x)\dot{x} + y\dot{y} = U'(x)y +$$

$$+ y(-U'(x)) = 0$$

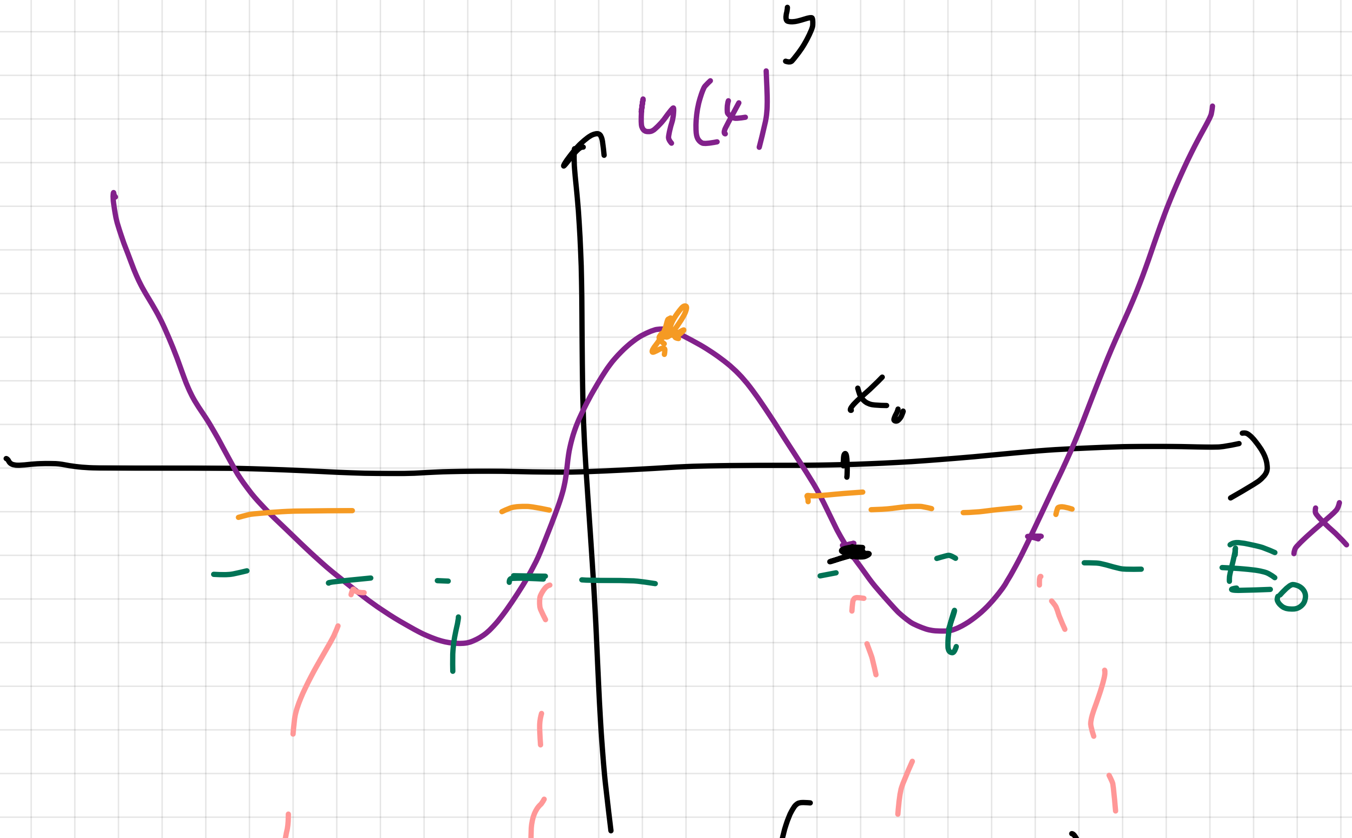
$$\ddot{x} = -x \quad \left(\ddot{x} = -\frac{dU}{dx}, \; U = \frac{x^2}{2} \right)$$

dostajemy poprzedni przykład.

Jak wygląda rozwiązanie?

$$\ddot{x} = -U'(x).$$

to zależy od poziomic funkcji H.

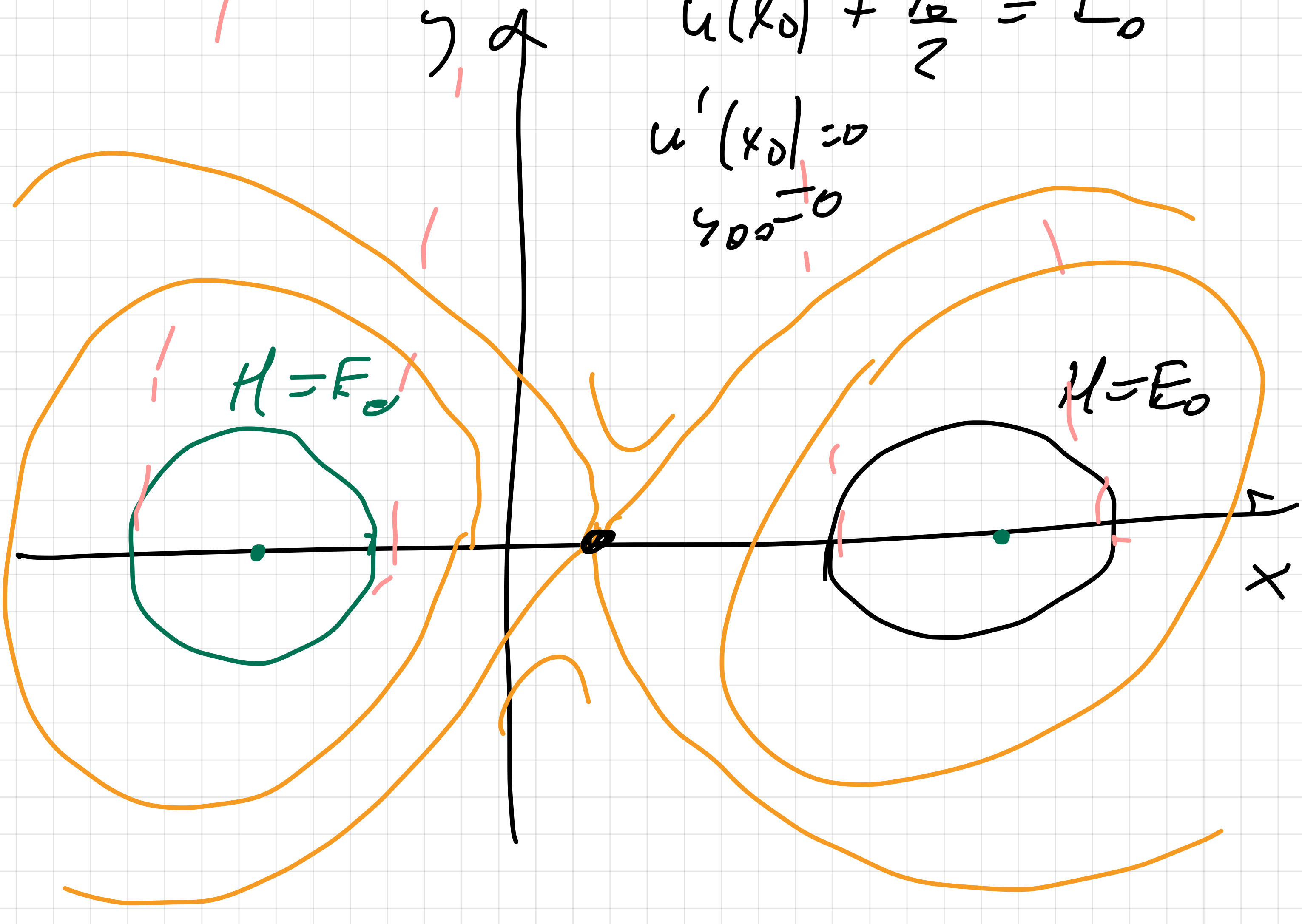


$$(x_0, y_0) \quad y_0 = 0$$

$$u(x_0) + \frac{y_0^2}{2} = E_0$$

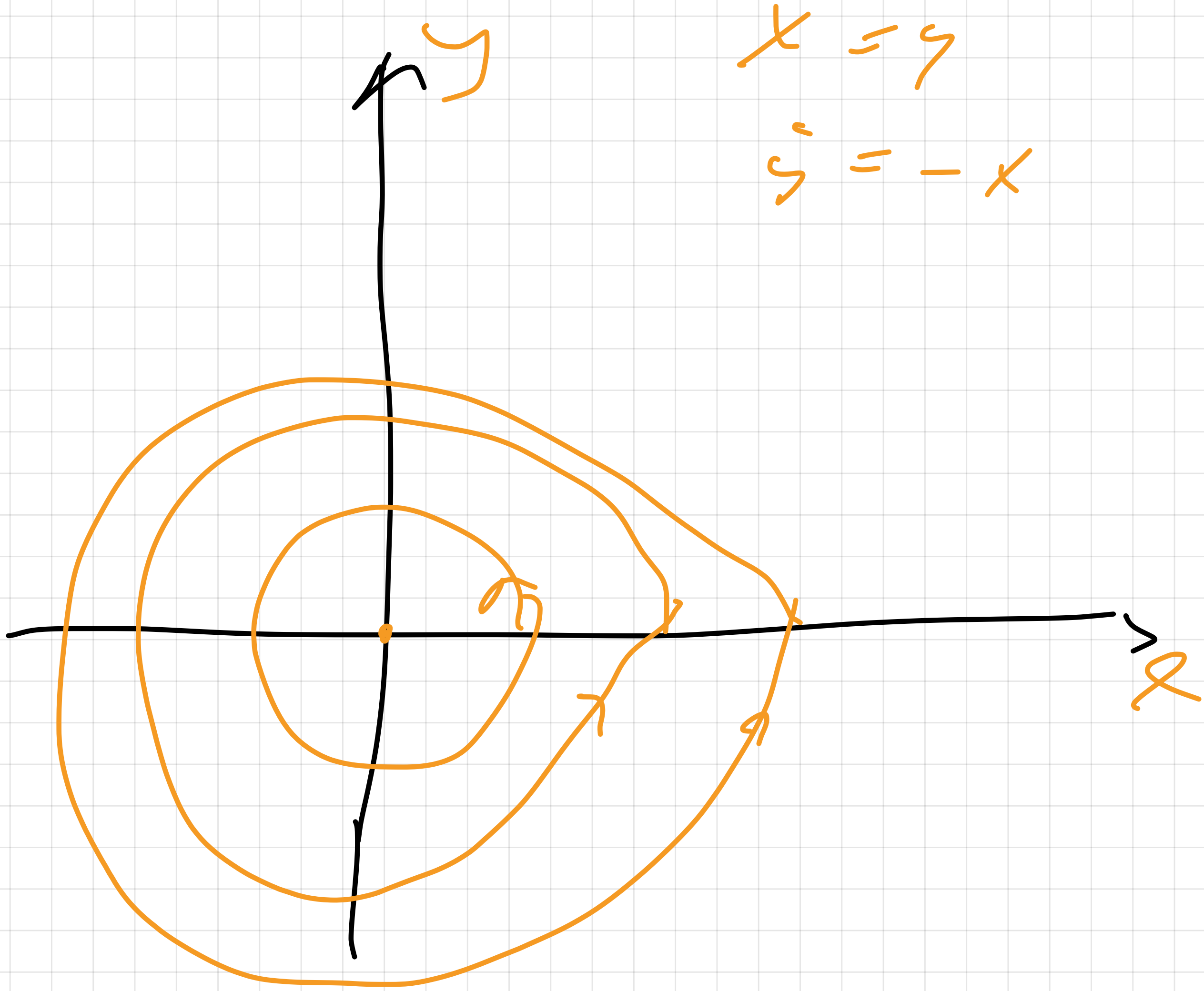
$$u'(x_0) = 0$$

$$y_0 = 0$$



Definicja: Portret fazowy układu $y' = F(x,y)$ to jest zbiór trajektorii (krzywych fazowych) układu dający ogólne pojęcie o zachowaniu się rozwiązań.

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -x$$



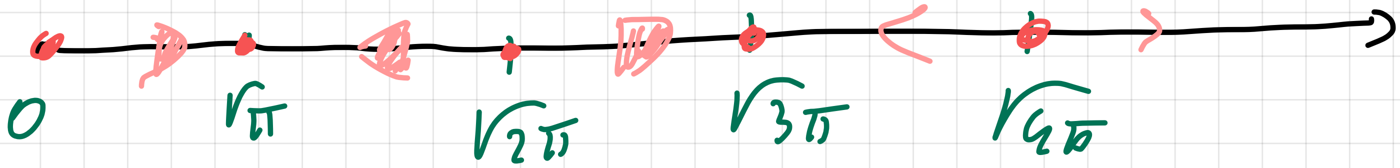
$$\dot{x} = y + x \sin(x^2+y^2)$$

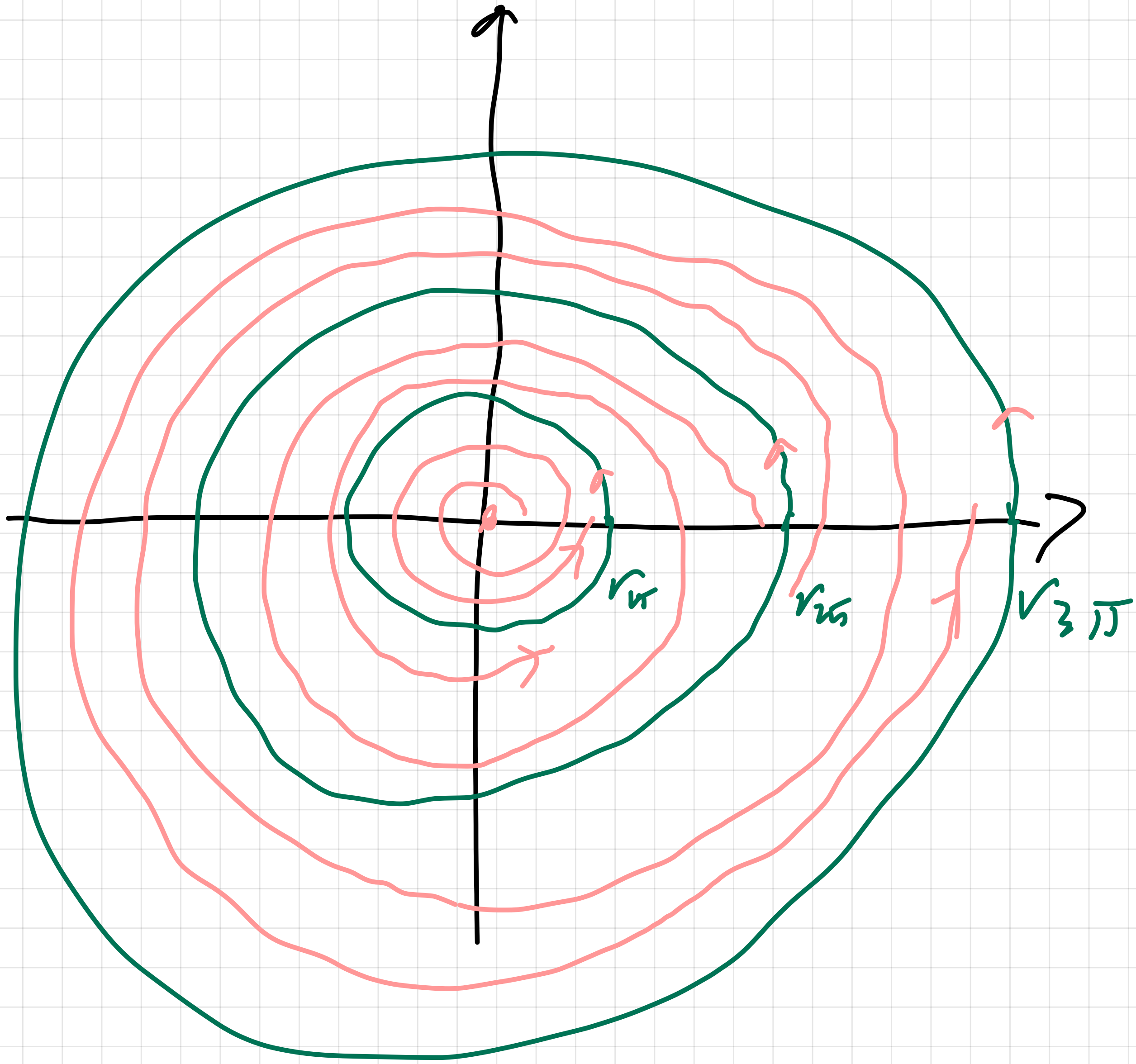
$$\dot{y} = -x + y \sin(x^2+y^2)$$

$$\dot{r} = \frac{1}{r}(x\dot{x} + y\dot{y}) = r \sin r^2$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{r^2}(\dot{y}x - \dot{x}y) = 1.$$

$$\dot{r} = r \sin r^2$$





Umiejętność rysowania p. fazowych jest często ważniejsza, niż umiejętność znajdowania konkretnych rozwiązań.

$$y'(x) = F(x, y(x))$$

F jest liniowe ← extra założenie.

wtedy: $y'(x) = A(x)\, y(x)$. φ_{x_0, x_1}

Twierdzenie: $A(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

Przekształcenie φ_{x_0, x_1} jest liniowe.

Ponadto, dla ustalonego x_0

Funkcja $x \overset{w}{\longmapsto} \det \varphi_{x_0, x}$

spełnia równanie:

$$w'(x) = \big(\operatorname{Tr} A(x)\big)\, w(x).$$ Liouville.

Dowód

1. Liniowość φ_{x_0, x_1}.

Jeśli $y_1' = A(x) y_1(x)$

$y_2' = A(x) y_2(x)$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$

to funkcja $y_3(x) = a y_1(x) + b y_2(x)$

spełnia:

$$y_3' = a y_1' + b y_2' = a A y_1 + b A y_2 =$$

$$A a y_1 + A b y_2 = A(a y_1 + b y_2) = A y_3.$$

x_0, $y(x_0) = y_1 \rightsquigarrow y(x_1) = \varphi_{x_0, x_1}(y_1)$

$y(x_0) = y_2 \rightsquigarrow y(x_1) = \varphi_{x_0, x_1}(y_2)$

$y(x_0) = a y_1 + b y_2 \quad y(x_1) = a \varphi_{x_0, x_1}(y_1)$

$+ b \varphi_{x_0, x_1}(y_2)$ liniowość.

(2) $y' = A(x)\, y$.

Funkcja $x \overset{w}{\longmapsto} \det \varphi_{x_0,x}$

spełnia równanie:

$$w'(x) = \left(\operatorname{Tr} A(x)\right) w(x).$$

Niech $e_1, \dots, e_n$ będzie bazą przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

$$\left(\varphi_{x_0,x}(e_1), \dots, \varphi_{x_0,x}(e_n)\right)$$

Wyznacznik macierzy utworzonej przez jest równy $\det \varphi_{x_0,x}$.

$$\frac{d}{dx} \det\left(\dot{\varphi}_{x_0,x}(e_1), \dots, \dot{\varphi}_{x_0,x}(e_n)\right) =$$

$$\varphi_{x_0, x+h} = \varphi_{x, x+h} \circ \varphi_{x_0, x}$$

$$\det \varphi_{x_0, x+h} = \det \varphi_{x, x+h} \cdot \det \varphi_{x_0, x} .$$

$$\underbrace{\frac{\det \varphi_{x_0, x+h} - \det \varphi_{x_0, x}}{h}}_{= w'(x)} =$$

$$= \frac{1}{h} \left(\det \varphi_{x, x+h} - 1 \right) \cdot \underbrace{\det \varphi_{x_0, x}}_{w(x)} .$$

$$\underbrace{\varphi_{x, x+h} = Id + A(x) \cdot h + \ldots}_{\det = 1 + h \operatorname{Tr} A(x) + \ldots}$$ chcemy

2 krohi: 1° $\varphi_{x, x+h} = Id + A(x)h + \ldots$

2° $\det (I + A(x) h + \ldots) =$

$= 1 + h \operatorname{tr} A + \ldots$

$$y(x) = y_0$$

$$y(x+h) = y_0 + h\, y'(x) + \ldots \overset{?}{=} \text{(fragment wzoru Taylora)}$$

$$= y_0 + h\, A(x)\, y_0 + \ldots$$

$$\varphi_{x,x+h}(y_0) = y_0 + h\, A(x)\, y_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow$$

$$\varphi_{x,x+h} = \mathrm{Id} + h \cdot A(x) + \ldots$$

tyle w temacie 1.

(2) $$\det(\mathrm{Id} + h\, A(x) + \ldots) =$$

$$\overset{?}{=} 1 + h \operatorname{Tr} A(x) + \ldots$$

$I + hA$ (nie piszemy x, bo x

Test ustalony $A = A(x)$)

$$\det(I + hA)$$

$$A = CJC^{-1} \qquad J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\det(I + hA) = \det C(I + hA)C^{-1} =$$

$$= \det(I + hJ) = \det\begin{pmatrix} 1+h\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1+h\lambda_n \end{pmatrix} =$$

$$= (1 + h\lambda_1)\cdots(1 + h\lambda_n) = 1 + h(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$$

$$+ \ldots = 1 + h\,\mathrm{Tr}\,J + \ldots \quad 1 + h\,\mathrm{Tr}\,A + \ldots$$

Tw. Liouville'a.

$W(x) = \det \varphi_{x_0, x}$ spełnia równanie różniczkowe

$$w'(x) = \left(\operatorname{Tr} A(x)\right) \cdot w(x).$$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (I + tA) = \operatorname{Tr} A$$

$$y' = F(y)$$

Potok pola wektorowego zachowuje objętość $\iff \operatorname{div} F = 0$.

$$\mathcal{L}_v \omega = \iota_v d\omega \overset{?}{\pm} \operatorname{div} \omega$$