Wykład 4,5.

Dowód twierdzenia o regularności rozwiązań.

Oznaczenia:

$F : (a,b) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

F jest klasy C^k.

$(x_0, y_0) \in (a,b) \times \Omega$

$\varepsilon, \delta > 0$ takie, że

$[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset (a,b)$

$\overline{B(y_0, \delta)} \subset \Omega$

Oznaczamy

$$M_j = \sup_{(x,y) \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \times B(y_0, \delta)} \| D^j F(x,y) \|$$

Tutaj $\|\cdot\|$ oznacza dość skomplikowaną normę, zależącą od j:

- dla $j=0$ $\|F(x,y)\|$ jest zwykłą normą w $\mathbb{R}^n$.
- dla $j=1$ $D^1 F : (a,b) \times \Omega \to L(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^n)$ i rozpatrujemy normę indukowaną.
- dla $j=2$ $D^2 F : (a,b) \times \Omega \to L(\mathbb{R}^{n+1}, L(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}))$.

i tak dalej ....

Dygresje motywujące (d-mot)

Jeśli $y' = F(x, y(x))$ (*), to możemy rozwinąć y wokół x_0.

$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0) F(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{y''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots$$

wielkość $y''(x_0)$ jest równa

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y(x_0)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) F(x_0, y_0)$$

wyższe pochodne obliczamy różniczkując wielokrotnie (*) i wstawiając

$x = x_0,\ y = y_0$

Niech dla $j \geq 0$, $j < k$

wyrażenie $\hat{y}_j(x)$ będzie

wielomianem stanowiącym j-te przybliżenie

Taylora funkcji $y(x)$ wokół x_0.

To znaczy:

$$\hat{y}_0(x) \equiv y_0$$

$$\hat{y}_1(x) = y_0 + (x-x_0) F(x_0, y_0)$$

$$\hat{y}_2(x) = y_0 + (x-x_0) F(x_0,y_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^2 \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) F(x_0,y_0) \right)$$

$$\hat{y}_3(x) = \ldots$$ (można użyć wzoru di Bruno)

Uwaga: zakładamy, że δ i ε są tak małe, że $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ kulka o środku w $\hat{y}_k(x)$ i promieniu

δ jest zawarta w Ω.

Określony przestrzeń X:

X jest przestrzenią funkcji w klasy C^k

$u : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \longrightarrow \Omega$, takich, że

1) $\| u - \hat{y}_k(x) \|_{C^k} \leq \delta$., oraz

do stopnia.

2) Rozwinięcie Taylora w wokół x_0

jest równe $\hat{y}_k(x)$

Operator T określony na X

jest zadany wzorem:

$$Ty(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(x, y(x)).$$

Lemat 1. Jeśli $y_1 = Ty$, to

$$y_1'(x) = F(x, y(x)).$$

Dowód:

$$\frac{d}{dx}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} F(s, y(s))\,ds\right) =$$

$$= \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} F(s, y(s))\,ds = F(x, y(x)).$$

Wniosek: Jeśli y ma rozwinięcie (do k-tego stopnia) Taylora wokół x_0 równe $\hat{y}_k(x)$, to Ty też.

Dowód: Z postaci Ty wnioskujemy, że $Ty(x_0) = y_0$. Z lematu 1 otrzymujemy, że $Ty(x_0)' = F(x_0, y_0)$.

Dalej stosujemy indukcję i Lemat 1.

Dla drugiej pochodnej widzimy, że

$$\frac{d^2}{dx^2} T_y(x)\Big|_{x=x_0} \overset{\text{Lemat 1.}}{=} \frac{d}{dx} F(x, y(x))\Big|_{x=x_0} =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y(x_0)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\, y'(x_0) =$$

$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = F(x_0, y_0)$

$$= \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\, F(x_0, y_0) = y''(x_0).$$

Dla wyższych pochodnych Lemat 1 pozwala na wyrażenie j-tej pochodnej $T_y(x)$ w terminach co najwyżej $(j-1)$-szej pochodnej $y(x)$. To pozwala na krok indukcyjny. Szczegóły pomijamy.

Lemat 2: Dla dostatecznie małych ε, δ jeśli $y(x) \in X$, to

$$\| T_y(x) - \hat{y}_k \|_{C^k} \leq \delta.$$

Dowód:

Przeprowadzimy dowód dla $k=1$ i $k=2$, w pozostałych przypadkach dowód jest analogiczny.

Dla $k=1$ teza lematu mówi:

$$\| T_y(x) - y_0 - F(x_0, y_0)(x - x_0) \|_{C^1} < \delta.$$

Mamy:

$$\sup_{x \in [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]} \| T_y(x) - y_0 - F(x_0, y_0)(x-x_0) \|$$

$$= \sup_{x \in [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]} \left\| \int_{x_0}^{x} F(s, y(s))\, ds - F(x_0, y_0)(x-x_0) \right\|$$

$$\leq \sup_{x \in [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]} \left\| \int_{x_0}^{x} F(s, y(s))\, ds \right\| +$$

$$+ \sup_{x \in [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]} \| F(x_0, y_0)(x-x_0) \| \leq$$

$$\leq 2 M_0 \varepsilon .$$

Dla pierwszych pochodnych:

$$\sup_{x \in [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]} \left\| \frac{d}{dx} \left(T_y(x) - y_0 - F(x_0, y_0)(x-x_0) \right) \right\| =$$

Lemat

$$= \sup_{x \in [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]} \| F(x, y(x)) - F(x_0, y_0) \| \leq$$

$$\leq \sup_{x\in[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]} \| F(x, y(x)) - F(x, y_0) +$$

$$+ F(x, y_0) - F(x_0, y_0)\| \leq$$

$$\leq \sup_{x\in[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]} \| F(x, y(x)) - F(x, y_0)\| + \quad (1)$$

$$+ \sup_{x\in[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]} \| F(x, y_0) - F(x_0, y_0)\| \leq \quad (2)$$

(2) Łatwiejsze:

$$\| F(x, y_0) - F(x_0, y_0)\| \leq \sup \left\|\frac{\partial F}{\partial x}(s, y_0)\right\| |x - x_0|$$

$$\leq M_1 \cdot \varepsilon$$

(1) $\| F(x, y(x)) - F(x, y_0)\| \leq$

$\leq$ analogicznie jak wyżej $\leq \sup_{s,x} \left\|\frac{\partial F}{\partial y}(x, s)\right\|$

$$\cdot \| y(x) - y_0\| \leq$$

$$\leq M_1 \sup_x \| y(x) - y_0\| \leq$$

zła droga: $\|y(x)-y_0\| \leq \delta$ – za słabe

dobra droga:

$$\|y(x)-y_0\| = \|y(x)-y(x_0)\| \leq$$

$$\leq \sup_{s} \|y'(s)\| \cdot |(x-x_0)| \leq \delta \cdot \varepsilon .$$

Ostatecznie:

$$\left\| \frac{d}{dx}\left(Ty(x) - y_0 - F(x_0,y_0)(x-x_0)\right)\right\| \leq$$

$$\leq M_1 \varepsilon (1+\delta).$$

W szczególności:

$$\left\| \frac{d}{dx}\left(Ty(x) - y_0 - F(x_0,y_0)(x-x_0)\right)\right\|_{C^1} \leq$$

$$\leq \left(M_0 + M_1(1+\delta)\right)\varepsilon \leq \delta$$

jeśli $\varepsilon \ll \delta$.

Dla $k > 1$ postępujemy analogicznie

Twierdzenie: dla dostatecznie małych ε, δ, odwzorowanie $T: X \to X$ jest kontrakcją.

Dowód:

Przeprowadzimy dowód dla $k=2$.

Ustalmy $y_1, y_2 \in X$,

$$\left(Ty_1 - Ty_2\right)(x) = \int_{x_0}^{x} F(s, y_1(s)) - F(s, y_2(s)) \, ds.$$

Czyli, jak w klasycznym przypadku:

$$\| F(x, y_1(x)) - F(x, y_2(x)) \| \leq M_1 \|y_1 - y_2\|_{sup}$$

a zatem:

$$\sup \| Ty_1(x) - Ty_2(x) \| \leq M_1 \varepsilon \|y_1 - y_2\|_{sup}$$

Szacowanie pierwszej pochodnej:

$$\frac{d}{dx} \| Ty_1(x) - Ty_2(x) \| = F(x, y_1(x)) - F(x, y_2(x)).$$

z tej sposób:

$$\| F(x, y_1(x)) - F(x, y_2(x)) \| \leq M_1 \|y_1 - y_2\|_{sup}$$

nie ma powodu, aby to było mniejsze niż 1.

Ale z definicji X zachodzi $y_1(x_0) = y_2(x_0)$. A zatem:

$$\|y_1(x) - y_2(x)\| \leq |x - x_0| \cdot \|y_1' - y_2'\|_{sup} \leq$$

$$\leq \varepsilon \|y_1' - y_2'\|_{sup}.$$

Czyli:

$$\left\| \frac{d}{dx}\left(T_{y_1}(x) - T_{y_2}(x)\right)\right\|_{sup} \leq M_1 \varepsilon \|y_1' - y_2'\|_{sup}.$$

Szacujemy drugie pochodne:

$$\left\| \frac{d^2}{dx^2}\left(T_{y_1}(x) - T_{y_2}(x)\right)\right\|_{sup} = \| F_x'(x, y_1(x)) -$$

$$- F_x'(x, y_2(x)) + F_y'(x, y_1(x)) y_1'(x) -$$

$$- F_y'(x, y_2(x)) y_2'(x) \|_{sup} \leq$$

$$\leq \| F_x'(x, y_1(x)) - F_x'(x, y_2(x)) \|_{sup} +$$

$$+ \| F_y'(x, y_1(x)) y_1'(x) - F_y'(x, y_2(x)) y_2'(x) \| \leq$$

$$\leq \left\{ \begin{matrix} \text{pierwszy} \\ \text{czynnik} \\ \text{tak jak poprzednio} \end{matrix} \right\} \leq M_2 \varepsilon \|y_1' - y_2'\|_{\sup} +$$

$$+ \| F_y'(x, y_1(x)) y_1'(x) - F_y'(x, y_1(x)) y_2'(x) +$$

$$+ F_y'(x, y_1(x)) y_2'(x) - F_y'(x, y_2(x)) y_2'(x) \| \leq$$

$$\leq \| F_y'(x, y_1(x)) \|_{\sup} \| y_1' - y_2'(x) \|_{\sup} +$$

$$+ \| F_y'(x, y_1(x)) - F_y'(x, y_2(x)) y_2'(x) \|_{\sup}$$

(1): $\|y_1' - y_2'(x)\|_{\sup} \leq \|y_1'' - y_2''\| \cdot \varepsilon$, bo

$y_1'(x) - y_2'(x) = 0$ w x_0.

(2). $\|y_2'(x)\| \leq C$ dla pewnej stałej C.

tę stałą możemy wyznaczyć w terminach $M_0, M_1, \delta, \varepsilon$, ale nie jest to konieczne.

W związku z tym:

$$② \leq C \| F'_y(x, y_1(x)) - F'_y(x, y_2(x)) \|_{sup}$$

$$\leq C M_1 \| y_1(x) - y_2(x) \|_{sup} \leq$$

$$\leq C M_1 \varepsilon \| y_1'(x) - y_2(x)' \|_{sup}.$$

Ostatecznie:

$$\| T_{y_1}(x) - T_{y_2}(x) \|_{C^2} \leq M_1 \varepsilon \| y_1 - y_2 \|_{sup} +$$

$$+ M_1 \varepsilon \| y_1' - y_2' \|_{sup} + M_1 \varepsilon \| y_1'' - y_2'' \|_{sup} +$$

$$+ C M_1 \varepsilon \| y_1' - y_2' \|_{sup} \leq$$

$$\leq M_1 (1 + C) \varepsilon \| y_1 - y_2 \|_{C^2}.$$

biorąc $\varepsilon << 1$ uzyskujemy tezę.