$$\ddot{x} = \lambda x + \cos \mu t$$

$\mu^2 = \lambda$ $\mu^2 \neq \lambda$

rozvikleni rovnenie:

$$\ddot{x} = \lambda x$$

to $x = A \cos \sqrt{\lambda}\, t + B \sin \sqrt{\lambda}\, t$

$$x = A \cos \sqrt{\lambda}\, t + B \sin \sqrt{\lambda}\, t + C t \cos \sqrt{\lambda}\, t + D t \sin \sqrt{\lambda}\, t$$

$$x = A \cos \sqrt{\lambda}\, t + B \sin \sqrt{\lambda}\, t + C \cos \mu t + D \sin \mu t$$

$$\dot{x} = v(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

v gładka.

$x_0 \in \mathbb{R}^n \; : \; v(x_0) = 0$

punkt stacjonarny
krytyczny
równowagi.
osobliwy

Powiemy, że x_0

jest stabilny (w sensie Lapunowa)

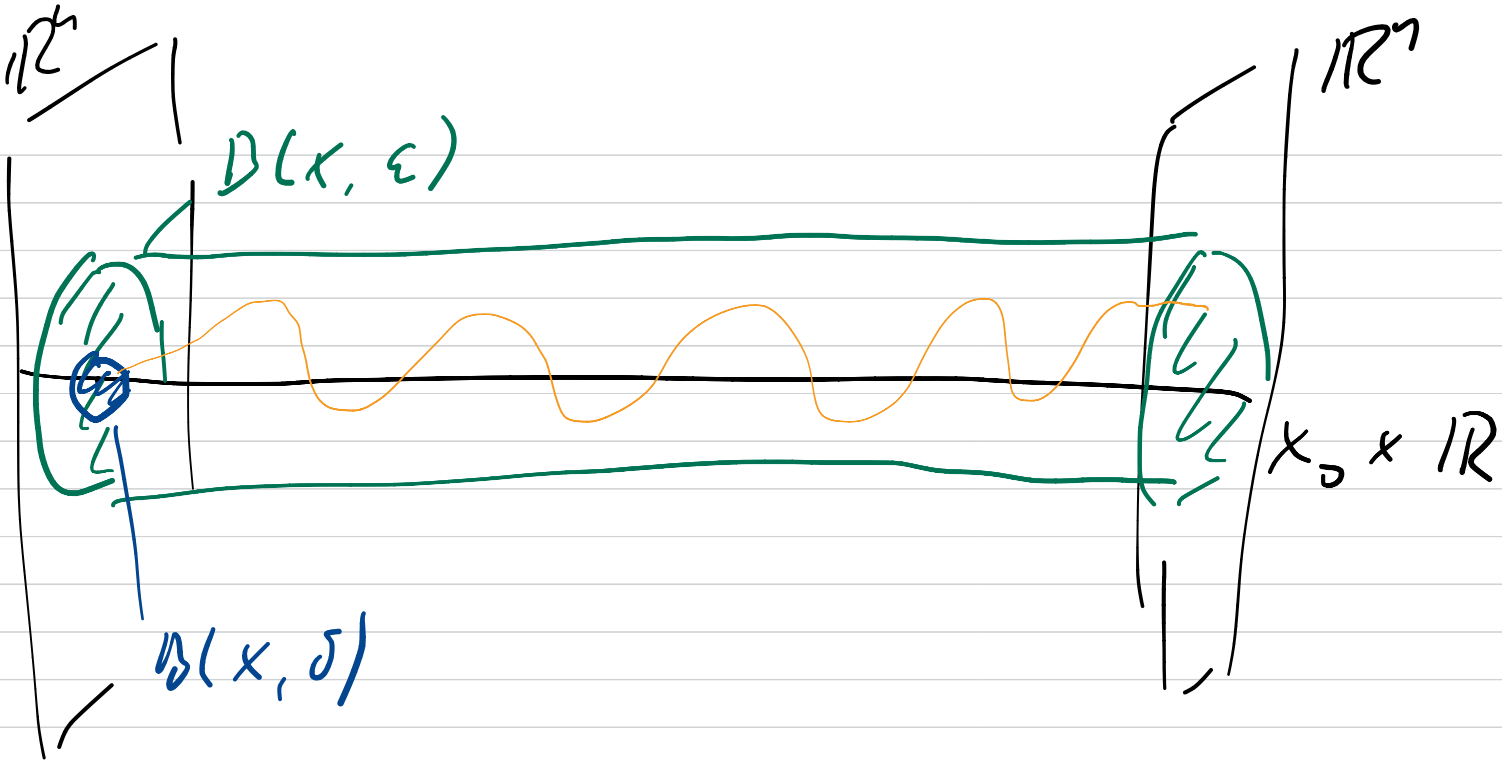
jeśli $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ taka, że

równanie $\dot{x} = v(x)$ z warunkiem

początkowym $x(0) = x_1 \in B(x_0, \delta)$

pozostaje w kuli $B(x_0, \varepsilon)$ dla

wszystkich $t \geq 0$.



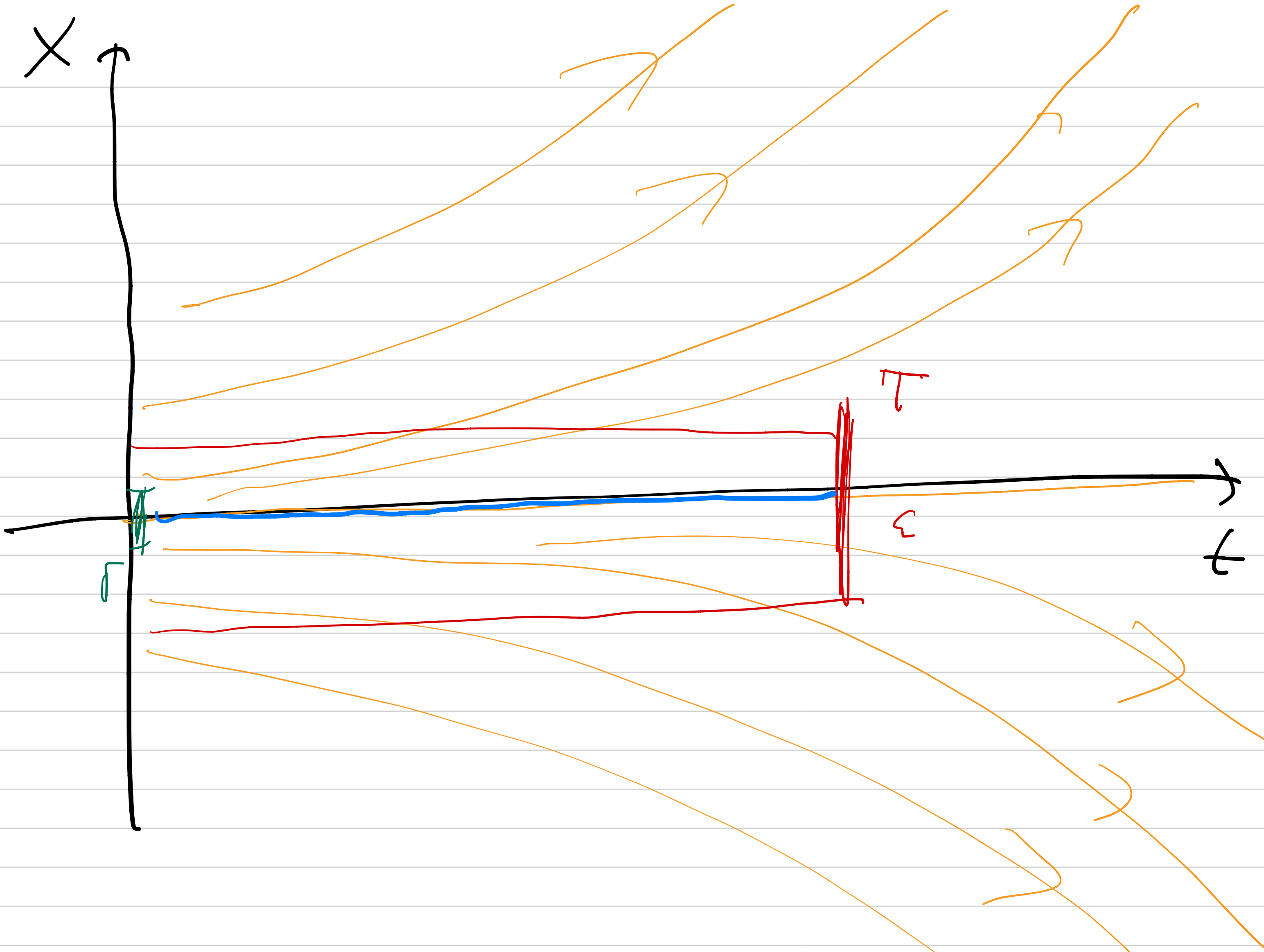
$$\dot{x} = x \qquad v(x) = x$$

$$v(0) = 0 \qquad x_0 = 0$$

$$x = Ce^{t} \qquad \forall x_1 \in \mathbb{R},\ x_1 \neq 0.$$

$$\lim_{t\to\infty} |x(t)| = \infty, \text{ glz}$$

$$x(0) = x_1$$



Zawsze można znaleźć $\delta > 0$ żeby rozwiązanie pozostało w pasku $|x| < \varepsilon$ przez ustalony czas $[0, T]$

$\dot{x} = x$ niestabilny.

$\dot{x} = -x$

$x(t) = Ce^{-t}$

$x(t) = x_1 e^{-t}$ $\qquad x(0) = x_1$

$\forall \varepsilon \ \exists \delta = \varepsilon$

Rozwiązanie startujące z punktu x_1 odległego o ε od $x_0 = 0$ cały czas zbliża się do rozwiązania zerowego.

1) Może stabilność jest powiązana z $\lim_{t \to \infty} x(t)$?

2) Może uda się sformułować prostszy warunek, że cały czas zbliża się?

1)

wszystkie trajektorie zbiegają do zera, ale układ nie jest stabilny!

Def: Punkt stacjonarny jest asymptotycznie stabilny, jeśli

a) jest stabilny

b) istnieje $\varepsilon > 0$ t. że

$\forall x_1 \in B(x_0, \varepsilon)$

jeśli $x(0) = x_1$, to $\lim_{t \to \infty} x(t) = x_0$

2)

Definicje:

$$\dot{x} = v(x)$$
$$v(x_0) = 0$$

Funkcję $L : \overline{B}(x_0, \varepsilon) \to [0, \infty)$ nazwiemy funkcją Lapunowa jeśli:

a) $L^{-1}(0) = x_0$

b) $\frac{dL}{dt} < 0$ gdzie

$x(t)$ rozwiązanie,

$t \mapsto L(x(t))$, lub alternatywnie

$\partial_v L < 0$, lub

$\langle \nabla L, v(x) \rangle < 0$

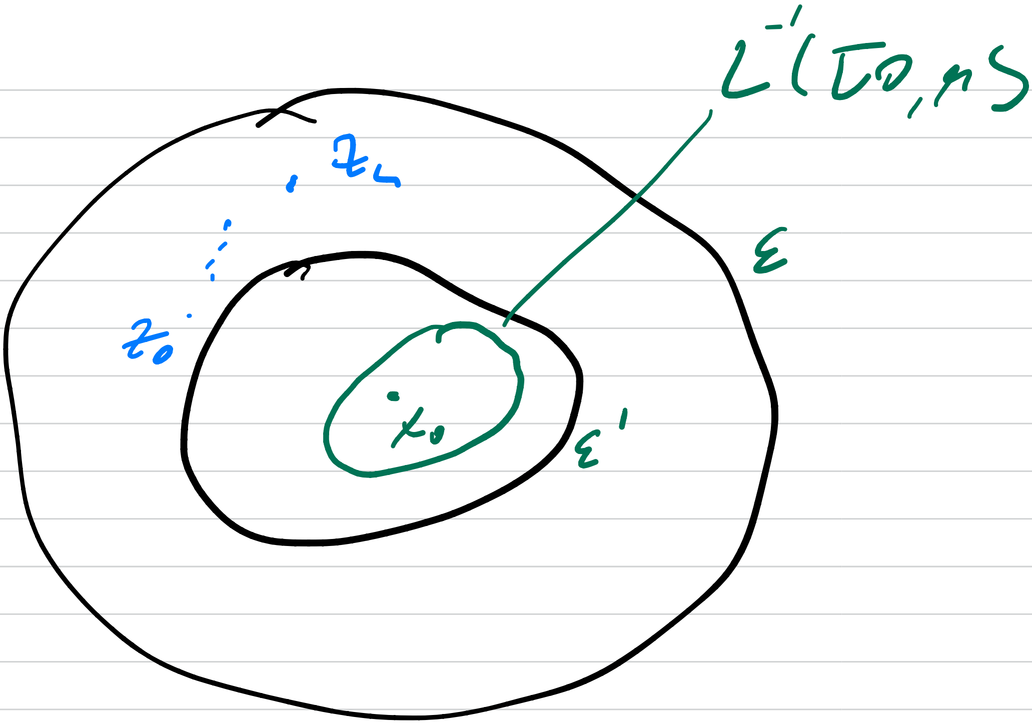
Twierdzenie: Jeśli istnieje funkcja Lapunowa, to x_0 jest asymptotycznie stabilny.

Dowód: $\forall \varepsilon' > 0 \quad \varepsilon' < \varepsilon$

1) $\exists \mu > 0$ oraz $\delta > 0$ takie, że:

$$B(x_0, \delta) \overset{(*)}{\subset} L^{-1}([0, \mu]) \overset{(**)}{\subset} D(x_0, \varepsilon').$$

Gdyby $(**)$ nie zachodziło dla żadnego $\mu = \frac{1}{n}$, to istnieje $z_n \in \overline{B}(x_0, \varepsilon) \setminus D(x_0, \varepsilon')$: $L(z_n) < \frac{1}{n}$.



schodzimy z z_n do granicy z_0,

z ciągłości L, $L(z_0)=0$ sprzeczność.

— to dowodzi (**).

Aby dowieść (*) piszemy

$L^{-1}[0,\mu)$ jest otwarty.

—

Obserwacja: dla takich wybranych δ, ε' rozwiązanie startujące z $B(x_0, \delta)$ nie wychodzi poza $B(x_0, \varepsilon')$.

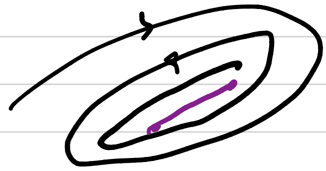
istotnie: w $B(x_0, \delta)$ mamy $L(x) \leq \mu$.

poza $B(x_0, \varepsilon')$ mamy $L(x) > \mu$.

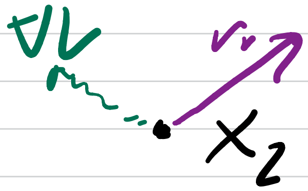
Pokażemy, że trajektorie startujące z punktu $x_1 \in B(x_0, \delta)$ zbiegają do x_0.

$x(t)$, takie że $x(0) = x_1$.

Niech $\omega(x)$ = zbiór punktów skupienia ciągu $x(t_n)$ dla $t_n \to \infty$.



Teza: $\omega(x) = \{x_0\}$.



$x_2 \in \omega(x)$

$x_2 = x_0$

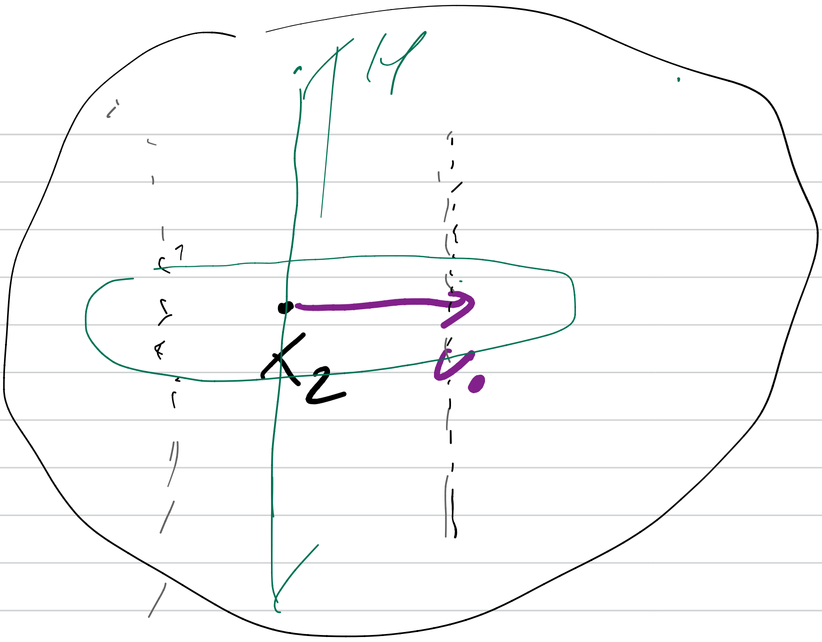
$v(x_2) = v_0 \neq 0$ w związku z tym

$$\langle \nabla L(x_2), v_0 \rangle = c_0 < 0$$

dla dostatecznie bliskich x_3:

$$x_3 \in B(x_2, \sigma), \quad \sigma > 0$$

$$\langle \nabla L(x_3), v_0 \rangle < \frac{c_0}{2} < 0$$



$B(x_2, \delta)$

$\langle \nabla L, v \rangle < 0$

wartość L na tym kawałku będzie mniejsza niż $L(x_2)$.

H hiperpłaszczyzna prostopadła do v przez x_2

$H + \varepsilon v$, $H - \varepsilon v$.

zostawiamy do wypełnienia.

$\dot{x} = x$ niestabilny

$\dot{x} = -x$ asym. stabilny.

$$\dot{x} = \lambda x \quad \begin{cases} \lambda > 0 & \text{niest.} \\ \lambda < 0 & \text{astab.} \\ \lambda = 0 & \text{stabilny.} \end{cases}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix} x$$

$\operatorname{Re}\lambda, \operatorname{Re}\eta < 0$ as. stabilny

$\operatorname{Re}\lambda$, lub $\operatorname{Re}\eta > 0$ niestabilny

$\operatorname{Re}\lambda = 0$ lub $\operatorname{Re}\eta = 0$.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} x \qquad \dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} x$$

$$x^{(4)} + 2\ddot{x} + x = 0$$

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda = \pm i$$

$$x = A\cos t + B\sin t + Ct\cos t + Dt\sin t$$

Dla wartości własnej $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ stabilność układu liniowego zależy od wymiarów klatki Jordana.

dla klatki 1×1 jest stabilność

dla klatek wyższych wymiarów: nie ma

$$\dot{x} = -y + \varepsilon x(x^2+y^2)$$

$$\dot{y} = x + \varepsilon y(x^2+y^2)$$

$\varepsilon = +1$

$\varepsilon = -1$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{r^2} \qquad \dot{r} = \frac{x\dot{x}+y\dot{y}}{r}.$$

$$\dot{\varphi} = 1, \quad \dot{r} = \varepsilon r^3.$$

$\varepsilon > 0$ nie ma stabilności

$\varepsilon < 0$ jest stabilność asymptotyczna.

$$\dot{x} = v(x) \qquad v(x_0) = 0.$$

$$A = Dv(x_0) \qquad v: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Twierdzenie (Lapunow) Lyapunov

Jeśli wszystkie wartości własne A mają części rzeczywiste < 0, to x_0 jest asymptotycznie stabilny

Twierdzenie Czetajew (Chetaev)

Jeśli $\exists$ wartość własna A, której część rzeczywista jest dodatnia, to x_0 jest niestabilny.

Ścisły dowód asymptotycznej stabilności.

Przypuśćmy, że $x(t)$ jest trajektorią. Pokażemy, że

$$\lim_{t \to \infty} L(x(t)) = 0.$$

Przypuśćmy przeciwnie. Funkcja $t \longmapsto L(x(t))$ jest nierosnąca więc $\exists \lim_{t \to \infty} L(x(t))$.

Oznaczmy tę granicę przez c.

Jeśli $c > 0$, to trajektoria $x(t)$ pozostaje cały czas w zbiorze $A_{c,\mu} = L^{-1}([c,\mu])$.

Ten zbiór jest zwarty, funkcja $x \to \langle \nabla L, v(x) \rangle$ jest ciągła, przyjmuje kres górny, który oznaczamy przez d.

Mamy $d < 0$, bo L jest funkcją Lapunowa.

Zatem, dla $x(t)$ zachodzi:

$$\frac{d}{dt} L(x(t)) = \langle \nabla L, v(x(t)) \rangle < d < 0,$$

ale to jest sprzeczne z założeniem, że

$$\lim_{t \to \infty} L(x(t)) > \infty.$$

A zatem, mamy sprzeczność. To oznacza, że $\lim_{t \to \infty} L(x(t)) = 0$.

To jest możliwe tylko wtedy, gdy

$x(t) \longrightarrow x_0$ przy $t \to \infty$.