Wykład 1.

Strona przedmiotu:
www.mimuw.edu.pl/~mcboro

Zasady zaliczania: na stronie przedmiotu.

Rozwiązywanie RRZ: wolfram → DSolve

...jak wolfram nie umie, to my prawdopodobnie też ;)

→ na kolokwiach: rozumienie, teoria itp.

- Nie ma głupich pyt.?
- A wróbelek siedzi na gałęzi czy stoi?

$F(x, y(x)) = 0 \leftarrow$ TFU (AM II.1)

a my chcemy: znaleźć $y(x)$ spełniającą równość
$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots y^{(n)}(x)) = 0$

y jest funkcją jednej zmiennej
(dziedzina y jest $\mathbb{R}$
gdyby było wielu zmiennych → RR cząstkowe

$\left.\begin{matrix} y' \\ z' \end{matrix}\right\}$ pochodne po x

$\dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}$ – pochodne po t.

Postać niewikłana:

$$y^{(n)} = F(x, y, \dots, y^{(n-1)})$$

Dlaczego RR są ważne? Mają zastosowania:

- modele - np. rozprzestrzenianie się epidemii i kiedy zamkną UW z powodu paniki przed epidemią
- zastosowania w przyrodzie
- — " — w fizyce (równania Eulera-Lagrange'a)
- wstęp do PRAWDZIWEJ geometrii różniczkowej
- wstęp do RRCząstkowych
- topologia różniczkowa (wstęp do)

$$\underset{\nwarrow \text{ stopień równania}}{y^{(n)}} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Możemy stopień zredukować:

$$\begin{cases} y_0' = y_1 \\ y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-2}' = y_{n-1} \\ y_{n-1}' = F(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \end{cases}$$

Nowe zmienne: $y_0, y_1, \dots, y_n$

tzn. y_k k-ta pochodna y.

Równanie wysokiego st.

$\downarrow$

Układ równań niskiego stopnia

[mat. nic się nie stało, ale te 2 formy są użyteczne w różnych sytuacjach!]

Def.

Zagadnieniem początkowym dla równania $y' = F(x, y(x))$ ⊛ z warunkiem początkowym nazywamy zadanie znalezienia funkcji $y(x)$ spełniającej ⊛ z warunkiem pocz. postaci $y(x_0) = y_0$

Def.

Rozwiązaniem zagadnienia początkowego jest PARA $(y, \mathcal{U})$, gdzie $y : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ spełnia ⊛, $x_0 \in \mathcal{U}$ i $y(x_0) = y_0$.

- czy można zasłonić okno?
- No i tak mieszka znaczenia i tak zaraz zajdzie słońce.

PYTANIA: → istnienie rozwiązania
→ jednoznaczność
→ regularność
→ zależność od warunku początkowego

Przykład: Równanie o zmiennych rozdzielonych

$$y' = a(x)\,b(y) \qquad a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$y(x_0) = y_0 \qquad \exists [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \text{ t.ż. } b(y) \neq 0 \ \forall y \in [\alpha, \beta]$$

$$y_0 \in [\alpha, \beta]$$

$: b(y)$ $\quad y' = \frac{dy}{dx}$

Rozw. $$\frac{1}{b(y)} \frac{dy}{dx} = a(x)$$ ⊛

z tw. o funkcji pierwotnej $\exists B : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ t.ż. $B'(t) = \frac{1}{b(t)}$

$\exists A$ t.ż. $A'(t) = a(t)$

$$\frac{d}{dx} B(y(x)) = \frac{dB}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b(y)} \cdot \frac{dy}{dx} \overset{*}{=} a(x) = \frac{d}{dx} A(x)$$

stała C

$$\Rightarrow \quad B(y(x)) = A(x) + C$$

B ma pochodną stałego znaku, więc jest monotoniczna i ma fcję odwrotną

$$y(x) = B^{-1}(A(x) + C) \qquad y(x_0) = y_0$$

wyznacza C

$\square$

Metoda bezmyślna:

$$y' = a(x) b(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = a(x) b(y) \qquad | : b(y)$$

$$\frac{1}{b(y)} \frac{dy}{dx} = a(x) \qquad | \cdot dx$$

$$\frac{1}{b(y)} dy = a(x) dx \qquad | \int$$

OSZUSTWO MATEMATYCZNE, ALE CZASAMI MA SENS.

$$\int \frac{1}{b(y)} dy = \int a(x) dx$$

$$B(y) = A(x) + C \qquad \leftarrow \text{tu już byliśmy}$$

$\square$

Metoda III:

$$\frac{1}{b(y)} \frac{dy}{dx} = a(x) \qquad y(x_0) = y_0, \quad x_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{b(y)} \frac{dy}{dx} = \int_{x_0}^{x_1} a(x)$$

TO JEST LEGALNE

Zamieniamy zmienne:

$$\boxed{\int_{y_0}^{y(x_1)} \frac{1}{b(y)}\, dy = \int_{x_0}^{x_1} a(x)\, dx}$$

Zrozumienie tego ~~zadania~~ metody przyda na głębsze rozumienie RR.

Przykład: $y' = y^2 x \qquad y(0) = 1$

Czy istnieje $x_0 > 0$ tz. $\lim_{x \to x_0^+} y(x) = +\infty$?

//TYPOWE PYTANIE: czy istnieje wybuch w skończonym czasie (ang. blow up)

I like coding
my family
and my pets.

Czy istnieje $x_1 < 0$
tż. $\lim_{x \to x_0^-} y(x) = +\infty$?

$$\int_{y_0=1}^{\infty} \frac{1}{y^2}\, dy = \int_{x_0=0}^{x_1} x\, dx$$

$$1 = \frac{x_1^2}{2}$$

$\Rightarrow$ tak, istnieje.

$x_1 = \sqrt{2}$

TYPOWE ZADANIE NA I KOLOKWIUM

Przykład

$$y' = y^{4/5}$$

$$\frac{1}{y^{4/5}}\, dy = dx$$

$$\int \frac{1}{y^{4/5}}\, dy = \int dx$$

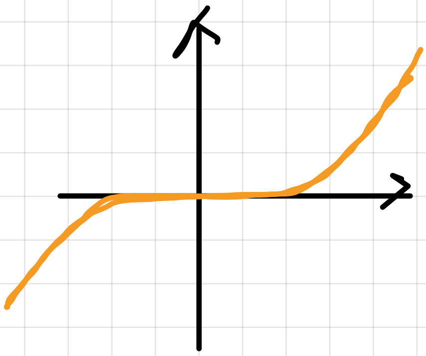
$$5y^{1/5} = x + C \qquad y = \left(\frac{x}{5} + C\right)^5$$

KATASTROFA:

zał. $y(0) = 0$ $\qquad y \equiv 0$

$$a < 0 < b$$

$$y(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{5} - a\right)^5 & \frac{x}{5} < a \\ 0 & \frac{x}{5} \in [a, b] \\ \left(\frac{x}{5} - b\right)^5 & \frac{x}{5} > b \end{cases}$$



Funkcja klasy C^1 a nawet C^4.

Ona jest rozwiązaniem, ale funkcji takich jest continuum.

BRAK JEDNOZNACZNOŚCI.

Funkcja $y^{4/5}$ różni się tym od normalnych funkcji, że nie jest różniczkowalna w 0.

Pytanie, czy różniczkowalność w 0 wystarczy do jednoznaczności?

Twierdzenie Cauchy'ego - Picarda

NAJWAŻNIEJSZE NA TYM WYKŁADZIE

Przypuśćmy, że $F: (a,b)\times\Omega \to \mathbb{R}$ gdzie Ω jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$ jest:

- ciągła
- lokalnie lipschitzowska ze względu na drugą zmienną.

Wtedy: $\forall\, x_0, y_0 \in (a,b)\times\Omega$

$\exists\, \varepsilon > 0$

oraz $\exists!\, y: (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \to \Omega$, że:

- $y(x_0) = y_0$
- $y'(x) = F(x, y(x))$ dla wszystkich $x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$

Co to znaczy lokalnie lipschitz.?

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| < L \cdot \|x_1 - x_2\|$$ ← warunek Lipschitza ogólnie

Warunek lokalny Lipschitza:

$\forall\, x_0, y_0 \in (a,b)\times\Omega$

$\exists\, r, L:$ jeśli: $\begin{cases} (x_1,y_1), (x_2,y_2) \in (a,b)\times\Omega \\ \|(x_i,y_i) - (x_0,y_0)\| < r \text{ dla } i=1,2 \end{cases}$

$x_2 = x_1$ (bo ze względu na drugą zmienną)

$$\Rightarrow \|F(x_1,y_1) - F(x_1,y_2)\| \leq L \cdot \|y_1 - y_2\|$$

Dowód [WAŻNY, TRZEBA UMIEĆ NA EGZAMIN]

Twierdzenie o odwzorowaniu zwężającym:
/to nie zastąpuje na nazwę tw./

X przestrzeń zupełna, metryczna

$T: X \to X$ t.ż. $\rho(Tx, Ty) \leq \lambda \rho(x,y)$ $\quad \lambda < 1$

wtedy $\exists!\, x_0$ t.ż. $Tx_0 = x_0$

(pozostaje bez dowodu)

Dowód Cauchy'ego Picarda

KLUCZOWY KROK: ZDEFINIOWAĆ T.

$$\begin{cases} y' = F(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$T_y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(s, y(s))\, ds$$

dlaczego wolimy $\int$ od różniczkowania? Bo $\int$ nie rozwalają nam regularności.

1° $Ty = y \iff \begin{array}{l} y' = F(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}$

2° $\exists\, X: T: X \to X$
i T jest kontrakcją

do spr.

Ozn. $Ty = T(y)$

ad. 1°

Przypuśćmy, że $Ty = y$

$$Ty(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(s, y(s))\, ds$$

Jak nie wiemy co robić to trzeba przepisać df i długo na nią patrzeć :)

$$y' = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} F(s, y(s))\, ds \xrightarrow{h \to 0} F(x, y(x))$$

TROCHĘ z AM II.

Czyli 1° prawda jeśli y ciągłe

Wybieramy jakieś $\varepsilon, \delta > 0$ (które ustalimy na końcu)

$$X = \{ u : [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \to \Omega \wedge \| u(x) - y_0 \| < \delta \} \quad (1)$$

Zakładamy, że δ jest takie że $\|u(x) - y_0\| < \delta$ było w Ω

Musimy sobie zagwarantować, że $T : X \to X$. — X to jest kula funkcji ciągłych z normą sup

To znaczy, że $\forall x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \wedge$

$$\wedge \forall u : [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \to [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$$

zachodzi
$$\left\| \int_{x_0}^{x} F(s, y(s))\, ds \right\| \leq \delta$$

Potrzebujemy odpowiednio mały ε.

Jeśli ozn. $M = \sup |F(x,y)|$ na $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$

to
$$\left| \int_{x_0}^{x} F(s, y(s))\, ds \right| < M \cdot |x_0 - x| < M \cdot \varepsilon$$

Wystarczy zatem zał. $\varepsilon < \dfrac{\delta}{M}$

Wtedy $T : X \to X$.

cdn. :)

(1) Definicja przestrzeni X nie jest do końca poprawna. Po pierwsze, X powinien być kula domknięta, po drugie, ta definicja zakłada, że $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, bo piszemy $[y_0 - \delta, y_0 + \delta]$.

Poprawna definicja X, to:

$$X = \{ u \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \to \Omega,\ \|u - y_0\| \leq \delta \}.$$

Tutaj zakładamy, że Ω jest podzbiorem zupełnej przestrzeni liniowej V z normą $\|\cdot\|$.