Twierdzenie Riemanna o liczbach pierwszych.
Według książki Stein – Shakarchi

Głównym celem wykładu jest udowodnienie następującego twierdzenia.

Twierdzenie 1. Niech $\pi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ będzie funkcją zliczającą liczby pierwsze. To znaczy,

$$\pi(x) = \#\{p\colon p \leq x \ p \text{ pierwsza}\}.$$

Wtedy istnieją stałe $A, B > 0$ takie, że dla x dostatecznie dużych

$$A\frac{x}{\log x} \leq \pi(x) \leq B\frac{x}{\log x}.$$

Często twierdzenie formułuje się jako $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$.

Aby dowieść twierdzenia, wprowadzamy *funkcję Czebyszewa*:

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p,$$

czyli sumujemy wielkość $\log p$ po tych liczbach, które są potęgami p mniejszymi od x. Na przykład:

$$\psi(10) = \log 2 + \log 3 + \log 2 + \log 5 + \log 7 + \log 2 + \log 3.$$

Można zapisać $\psi(x)$ za pomocą funkcji von Mangolta

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p\colon n = p^n \\ 0\colon \text{ w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Stwierdzenie 1. Funkcja $\pi(x)$ asymptotycznie zachowuje się jak $\frac{x}{\log x}$ jeśli $\psi(x) \sim x$.

Dowód. Piszemy najpierw

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor \log p \leq \sum_{p \leq x} \frac{\log x}{\log p} \log p = \log x \sum_{p \leq x} 1 = \pi(x) \log x.$$

W szczególności, jeśli $\psi(x) \geq Ax$ dla dostatecznie dużych x, to $\pi(x) \leq Ax/\log x$.

W drugą stronę, wybieramy $\alpha \in (0, 1)$. Wtedy

$$\psi(x) \geq \sum_{p \leq x} \log p \geq \sum_{x^\alpha \leq p \leq x} \log p \geq (\pi(x) - \pi(x^\alpha)) \log x^\alpha.$$

To zaś oznacza, że

$$\psi(x) + \alpha\pi(x^\alpha) \log x \geq \alpha\pi(x) \log x.$$

Wiemy, że $\pi(x) \leq x$ (bo π zlicza tylko część liczb). Możemy więc dobrać tak α, C, żeby $\pi(x^\alpha) \log x$ było mniejsze niż Cx dla dostatecznie dużych C. Jeśli $\psi(x) \leq Bx$, dostajemy że

$$\pi(x) \log x \leq \alpha^{-1}(B + C)x.$$

To dowodzi tezy. □

Uwaga 1. Tak naprawdę pokazujemy trochę więcej. Jeśli $\lim \frac{\psi(x)}{x} = 1$, to $\lim \pi(x) \frac{\log x}{x} = 1$.

Funkcja ψ nie jest idealna. Idealną funkcją będzie funkcja pierwotna ψ.

Stwierdzenie 2. Niech

$$\psi_1(x) = \int_1^x \psi(y) dy.$$

Jeśli $\psi_1(x) \sim \frac{x^2}{2}$, to $\psi(x) \sim x$.

Uwaga 2. Tak naprawdę moglibyśmy napisać $\psi_1(x) \sim x^2$. Tak naprawdę pokazujemy jednak, że jeśli $\lim \psi_1(x)\frac{2}{x^2} = 1$, to $\lim \psi(x)/x = 1$.

Dowód. Przyjmijmy $0 < \alpha < 1 < \beta$. Jako, że ψ jest niemalejąca, zachodzi

$$\frac{1}{(1-\alpha)x}\int_{\alpha x}^{x}\psi(u)du \leq \psi(x) \leq \frac{1}{(\beta-1)x}\int_{x}^{\beta x}\psi(u)du.$$

Wartość w mianowniku to długość przedziału.

Z tego wynika, że

$$\psi(x) \leq \frac{1}{(\beta-1)x}(\psi_1(\beta x) - \psi_1(x)).$$

Piszemy to inaczej

$$\frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{1}{\beta-1}\left(\frac{\psi_1(\beta x)}{\beta^2 x^2}\beta^2 - \frac{\psi_1(x)}{x^2}\right).$$

Przykładamy $\limsup$ do tej nierówności. Jeśli $\lim \sum \frac{\psi_1(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$, to otrzymujemy:

$$\limsup \frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{1}{\beta-1}\left(\frac{1}{2}\beta^2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(\beta+1).$$

Teraz β było dowolne większe od 1, stąd $\limsup \frac{\psi(x)}{x} \leq 1$. Dowód w drugą stronę jest analogiczny. □

Do tej pory właściwie nie używaliśmy funkcji analitycznych. Teraz wykorzystamy.

Definicja 1. Funkcja $\zeta(s)$ jest zadana wzorem $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$.

Wzór definiujący funkcję ζ ma sens dla $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$. Poczyńmy obserwację.

Lemat 1. Jeśli $x \in \mathbb{R}_{>0}$ oraz $s \in \mathbb{C}$, to $|x^s| = x^{\operatorname{Re} s}$.

Rozwiązanie. Piszemy $x = e^{\beta}$ oraz $s = a + bi$. Wtedy $x^s = e^{a\beta + b\beta i}$, czyli $|x^s| = e^{a\beta} = x^a = x^{\operatorname{Re} s}$. □

Z Lematu wnosimy, że szereg definiujący funkcję ζ jest zbieżny dla $\operatorname{Re} s > 1$ oraz jednostajnie zbieżny na $\operatorname{Re} s \geq 1 + \delta$ dla dowolnego $\delta > 0$. Stąd ζ jest funkcją holomorficzną.

Lemat 2. Dla dowolnego s takiego, że $\operatorname{Re} s > 1$ zachodzi

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^- s},$$

gdzie iloczyn bierzemy po wszystkich liczbach pierwszych.

Rozwiązanie. Kwestię zbieżności iloczynu zostawiamy jako ćwiczenie. Mamy

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

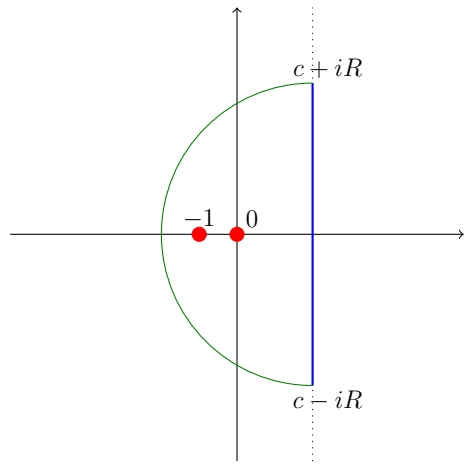
Stąd:

$$\frac{1}{1-p^{-s}} = 1 + p^{-s} + p^{-2s} + \dots.$$

A zatem

$$\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = (1 + 2^{-s} + 2^{-2s} + \dots)(1 + 3^{-s} + \dots)\dots$$

Ustalmy n. Zapiszmy n jako $p_1^{k_1}\cdots p_r^{k_r}$. W iloczynie po lewej stronie, wyrażenie n^{-s} pojawi się dokładnie raz: wymnażając skończenie wiele wyrażeń różnych od 1 i k_1-te wyrażenie przy p_1 itp. □



Rysunek 1. Kontur w dowodzie (2).

Teraz przyda się nam jeszcze jeden lemat. Dalsze oszacowania będą podane, ale udowodnione następnym razem.

Lemat 3. Zachodzi $\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$, o ile $\operatorname{Re} s > 1$.

Rozwiązanie. Mamy $\frac{\zeta'}{\zeta} = \frac{d}{ds} \log \zeta(s)$. Piszemy

$$\log \zeta(s) = \log \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_p \log \frac{1}{1-p^{-s}} = -\sum_p \log(1-p^{-s}).$$

Teraz

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots,$$

czyli

$$\log(\zeta) = -\sum_p \log(1-p^{-s}) = \sum \delta(n) n^{-s}, \tag{1}$$

gdzie $\delta(n) = \frac{1}{m}$ jeśli $n = p^m$, i $\delta(n) = 0$ w przeciwnym przypadku. Różniczkujemy (1) wyraz po wyrazie. Przypuśćmy, że $n = p^m$

$$\frac{d}{ds}\delta(n)n^{-s} = -\log n \delta(n) n^{-s} = -m \log p \frac{1}{m} n^{-s} = -\Lambda(n) n^{-s}.$$

□

Stwierdzenie 3. Dla dowolnego $c > 1$ oraz $x > 0$ zachodzi:

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) ds.$$

Dowód. Najpierw udowodnimy następujący wzór:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{a^s}{s(s+1)} ds = \begin{cases} 0 \colon a \in (0,1] \\ 1 - \frac{1}{a} \colon a > 1. \end{cases} \tag{2}$$

Aby dowieść tego wzoru wybieramy kontur Γ_R jak na rysunku. Składa się on z odcinka Γ_{1R} i półokręgu Γ_{2R}. Zapiszmy $x = e^t$ dla pewnego $t > 0$. Zapisujemy

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{ts}}{s(s+1)} ds.$$

Na całym Γ_R zachodzi $|e^{tz}| \leq |e^{tc}|$, więc mamy ograniczenie górne przez stałą. Z tego wynika, że całka po półokręgu Γ_{2R} zbiega przy $R \to \infty$ do zera. To oznacza, że całka po Γ_R zbiega do szukanej całki. Całkę po Γ_R liczymy jednak przez residua. Funkcja ma bieguny w $s = 0$ i $s = 1$. Elementarny rachunek daje tezę.

Przypominamy sobie, że $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$. To oznacza, że

$$\int_0^x \psi(s)ds = \sum_{n<x} \Lambda(n)(x-n).$$

Dowód tej tożsamości pozostawiam jako ćwiczenie (można zapisać ψ jako sumę funkcji indykatorowych). Korzystając ze wzoru

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

uzyskujemy:

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) ds = x \sum_{n=1}^{\infty} \int_{c-\infty}^{c+\infty} \Lambda(n) \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{(x/n)^s}{s(s+1)} ds = x \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \left(1 - \frac{x}{n}\right) = \psi_1(x)$$

□

Stwierdzenie 4. Wzór $\zeta(s)$ się przedłuża do funkcji meromorficznej na $\mathbb{C}$ mającej biegun wyłącznie w $s = 1$. Funkcja ζ nie zeruje się na zbiorze $\operatorname{Re} s = 1$. Ponadto:

- Dla dowolnego $\delta > 0$, istnieje C_δ taka, że jeśli $\sigma > 1$, $|\tau| \geq 1$, to przy $s = \sigma + i\tau$
$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| \leq C_\delta |\tau|^\delta.$$
- Dla dowolnego $\delta > 0$, istnieje C_δ taka, że jeśli $\sigma > 1$, $|\tau| \geq 1$, to przy $s = \sigma + i\tau$
$$|\zeta'(s)| \leq C'_\delta |\tau|^\delta.$$

W szczególności, ze Stwierdzenia 4 wyniknie sensowne oszacowanie na pochodną logarytmiczną ζ, z którego skorzystamy.

Stwierdzenie 5. Zachodzi $\psi_1(x) \sim \frac{x^2}{2}$.

Dowód. Skorzystamy ze Stwierdzenia 4. Oznaczmy:

$$F(s) = \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right).$$

Ustalmy kontury całkowania jak na rysunku **??**. Pozostawiamy jako ćwiczenie przekonanie się, że $\int_{\gamma_c} F(s) = \int_{\gamma_{1+}} F(s)$. Z drugiej strony, na mocy twierdzenia o residuach.

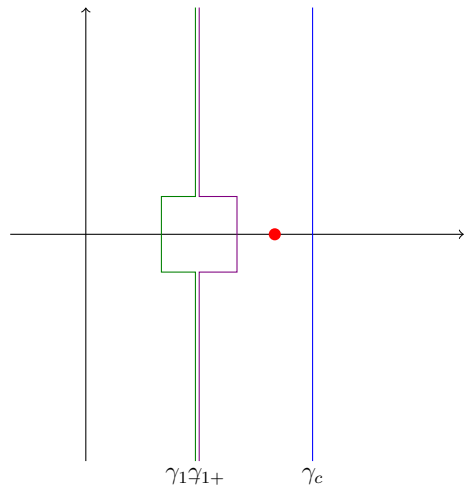
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{1+}} F(s)ds = \operatorname{res}_{s=1} F(s) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{1-}} F(s)ds.$$

Residuum F jest łatwe do policzenia, gdyż $s \mapsto \frac{x^{s+1}}{s(s+1)}$ jest holomorficzna w 1, a pochodna logarytmiczna ζ ma residuum równe rzędowi bieguna (z zasady argumentu), czyli -1. To oznacza, że

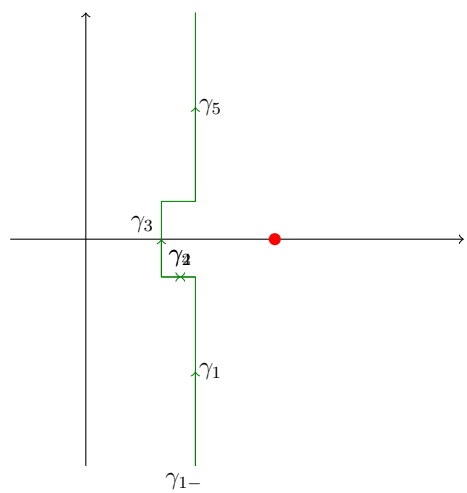
$$\operatorname{res}_{s=1} F(s) = \frac{x^2}{2}.$$

Zatem, Stwierdzenie 5 będzie udowodnione, jeśli wyszacujemy, że

$$\int_{\gamma_{1-}} F(s)ds$$



Rysunek 2. Trzy kontury całkowania. γ_c to $\operatorname{Re} z = c$. $\gamma_{1\pm}$ to kontury w większości zawarte w $\operatorname{Re} z = 1$, ale obchodzące punkt 1 (biegun ζ) z lewej lub prawej strony.



Rysunek 3. Podział konturu γ_{1-} na kawałki.

jest małe w porównaniu z $\frac{x^2}{2}$.

`Aby wyszacować całki, dzielimy kontur na kawałki.`

Zielony kontur γ_{1-} z rysunku 2 na fragmenty. Dokładniej, ustalamy $T > 0$ oraz δ (dobrane do T) tak aby w prostokącie:

$$\{z \in \mathbb{C}\colon\ \operatorname{Re} z \in [1-\delta, \delta],\ |\operatorname{Im} z| \leq T\}$$

funkcja ζ nie miała zer. Odcinki $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ są fragmentami tego konturu. Kluczowe jest szacowanie całki po γ_1 i γ_5. W tym celu, na mocy Stwierdzenia 4 możemy dobrać takie A, żeby dla $s \in \gamma_1 \cup \gamma_5$, $s = 1 + it$ zachodziło

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \leq A|t|^{1/2}.$$

A więc

$$\int_{\gamma_5} |F(s)| ds \leq C_1 x^2 \int_T^\infty \frac{|t|^{1/2}}{t^2} dt.$$

Jako, że całka jest zbieżna, możemy wziąć tak duże T, żeby

$$\int_{\gamma_5} |F(s)|ds \leq \varepsilon x^2.$$

Analogiczne szacowanie działa dla γ_1. Dla γ_3, szacujemy pochodną logarytmiczną ζ przez stałą. No i wtedy mamy

$$\int_{\gamma_3} |F(s)|ds \leq \int_{-T}^{T} C_2 x^{2-\delta} dt.$$

Biorąc teraz x dostatecznie duże (w stosunku do T), możemy przyjąć, że ta całka jest mniejsza niż εx^2. Całkę po γ_2 i γ_4 również dość łatwo szacujemy. Kończąc dowód. $\square$