Reguły gry:

- Zadania za zero punktów służą do przećwiczenia rzeczy, które warto umieć, ale niekoniecznie trzeba umieć wysiedzieć na zajęciach, jak wszyscy liczą.
- Zadania do spisania są do rozwiązania dla osób, które chcą się upewnić, że rozumieją rozwiązanie z ćwiczeń. Są one punktowane, do 5 punktów za zadanie. W sumie zadań będzie 10–15, maksymalna liczba punktów do zdobycia to 50.
- Za zadania punktowane można dostać albo 0 albo maksa. Jak jest coś nie do końca dobrze, ale jeszcze nie ma terminu oddania, to odsyłam zadanie do poprawki.
- Termin oddania zadań punktowanych to 10 czerwca 2022.
- Zadania z gwiazdką są punktowane 20 punktów podzielone na liczbę osób, które rozwiążą, minimalnie 4 punkty za osobę. Te zadania mają krótszy termin.
- Lista będzie uzupełniana.

1. Zadania za zero punktów

Zadanie 1.1. Oblicz objętość zbioru powstałego w wyniku przecięcia walca $x^2 + y^2 \leq 4y$ z kulą $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ w zależności od parametru a.

Zadanie 1.2. Oblicz objętość figury powstałej w wyniku obrotu wykresu funkcji $y = x^2$, $x \in [1, 2]$ wokół osi OX. Figura jest w trzech wymiarach, nie trzeba jej rysować.

Zadanie 1.3. Oblicz moment bezwładności czterowymiarowej jednorodnej kuli o promieniu r.[1]

Zadanie 1.4. Oblicz splot funkcji $f(x) = \max(0, 1 - |x|)$ z funkcją $g(x) = \sin x$.

2. Zadania do spisania

Zadanie 2.1 (5pkt)**.** Wykaż, że jeśli f jest całkowalna i dodatnia, ale f^2 nie jest całkowalna, to funkcja $x \to f * f(x)$ nie jest ograniczona w otoczeniu 0. Dokładniej, wykaż, że dla każdego $\delta > 0$ i $N > 0$, zbiór $\{x \in [-\delta, \delta] \colon f * f(x) > N\}$ ma dodatnią miarę.

Zadanie 2.2. Niech

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi}(\frac{1}{2}\cos x + \cdots + \cos nx) = \frac{\sin(n + 1/2)x}{2\pi \sin x}. \tag{1}$$

Wykaż, że jeśli f jest okresowa klasy C^k, $k > 1$, to $D_n * f$ zbiega jednostajnie do f.

Zadanie 2.3 (5pkt)**.** Niech $\omega = \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy$. Wykaż, że dla dowolnych $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ całka $\int_\gamma \omega$ po krzywej gładkiej startującej z z_1, kończącej w z_2 i omijającej $(0, 0)$, nie zależy od typu homotopii rel brzeg.

Zadanie 2.4. Niech η będzie 1-formą na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ taką, że $d\eta = 0$. Wykaż, że istnieje dokładnie jedno $c \in \mathbb{R}$ takie, że $\eta - c\omega$ jest postaci df, gdzie ω jest jak w Zadaniu 2.3.

Zadanie 2.5. Rozważmy współrzędne walcowe (r, ϕ, z) w $\mathbb{R}^3$ i formę $\alpha = \cos r dz + r \sin r d\phi$. Dla jakich R dysk $D_R = \{z = 0, r < R\}$ ma następującą własność:

- Dla każdego $x \in \partial D_R$ zachodzi równość $T_x D_R = \ker \alpha$?

Zadanie 2.6. Niech T będzie torusem sparametryzowanym przez $x = (R + r\cos\phi)\cos\alpha$, $y = (R + r\cos\phi)\sin\alpha$, $z = r\sin\phi$. Rozważmy $f \colon T \to \mathbb{R}$. Wyraź laplasjan f za pomocą pochodnych f po ϕ i α.

Zadanie 2.7. Niech $F \colon U \to V$ będzie odwzorowaniem klasy C^1 między dwoma zbiorami otwartymi $U \colon \mathbb{R}^n$ i $V \colon \mathbb{R}^m$. Przypuśćmy, że F ma następującą własność:

- Dla każdej funkcji klasy C^1 $g \colon V \to \mathbb{R}^m$, jeśli określimy $f \colon U \to \mathbb{R}$ przez $f(x) = g(F(x))$, to $DF(\nabla f) = \nabla(g)$.

[1] Pojęcie momentu bezwładności jest tak niesłychanie ważne dla ogólnego wykształcenia matematyka, że polecam sprawdzenie definicji w wikipedii. Po angielsku: *momentum of inertia*.

Wykaż, że F jest izometrią, tzn. pochodna w każdym punkcie spełnia $DF(x)^{-1} = DF(x)^T$, w szczególności $n = m$.

Uwaga. To zadanie pokazuje, że gradient jest pojęciem sztywniejszym, niż forma różniczkowa.

Zadanie 2.8. Przypuśćmy, że $X \subset \mathbb{R}^3$ jest podzbiorem zadanym przez $\{x, y, z \colon x^2 + y^2 < 1,\ F(x, y, z) \neq 0\}$, gdzie F jest klasy C^1, ∇F nie zeruje się na X. Określamy formę

$$\omega_F = \frac{1}{||\nabla F||} F'_x dy \wedge dz + F'_y dz \wedge dx + F'_z dx \wedge dy.$$

Wykaż, że dla dowolnej funkcji $g \colon X \to \mathbb{R}$, mierzalnej i ograniczonej, zachodzi:

$$\int_X g = \int_X g\omega_F,$$

gdzie pierwsza całka jest względem indukowanej miary Lebesgue'a, zaś druga z 2-formy.

Ograniczenie $x^2 + y^2 < 1$ jest tylko po to, żeby mieć zwartość i nie należy się nim bardzo przejmować.

Zadanie 2.9. Niech X będzie jak w Zadaniu 2.8. Niech ω_X będzie 2-formą na X określoną przez $\omega_X(v, w) = dx \wedge dy \wedge dz(v, w, n)$, gdzie n jest wektorem normalnym jednostkowym. Wykaż, że $\omega_X = \omega_F$.

3. Zadania z gwiazdką

Funkcja okresowa oznacza funkcję o okresie 2π. Splot dla funkcji okresowych rozpatrujemy jako całkę od $-\pi$ do π.

Zadanie 3.1. Podaj przykład funkcji ciągłej i okresowej f takiej, że $D_n * f$ nie jest punktowo zbieżny do f.

Zadanie 3.2. Niech $F_n = \frac{1}{n}(D_0 + \cdots + D_{n-1})$. Uzasadnij, że F_n jest nieujemna oraz dla każdej funkcji ciągłej i okresowej zachodzi $F_n * f$ zbiega jednostajnie do f.

Zadanie 3.3 (5 pkt)**.** Udowodnij analog lematu Hadamarda dla n-wymiarów.

Zadanie 3.4. Niech A będzie algebrą funkcji klasy $C^\infty[-1, 1]$, odwzorowanie $D : A \to \mathbb{R}$ jest ciągłe, oraz spełnia $D(fg) = f(0)Dg + g(0)Df$. Wykaż, że istnieje stała c taka, że $Df(x) = cf'(0)$.

Zadanie 3.5. Wykaż, że jeśli $\alpha = dz + r^2 d\phi$, to nie istnieje *żaden* gładko zanurzony dysk w $\mathbb{R}^3$, który spełnia własność z Zadania 2.5.

4. Proponowane zajęcia na tydzień 4-9 kwietnia

Zadanie 4.1. Funkcja $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest w L^1 i spełnia $f * g = g$ dla wszystkich funkcji g ciągłych o zwartym nośniku. Wykaż, że f jest równa zero prawie wszędzie na każdym przedziale $[a, b]$. To ostatnie ma się przełożyć na stwierdzenie, że taka f nie istnieje.

Zadanie 4.2. Czy istnieje funkcja $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ z L^1, która spełnia $f * g(0) = g(0)$ dla wszystkich funkcji g ciągłych i o zwartym nośniku?

Zadanie 4.3. Funkcje f i g mają zwarty nośnik i f jest klasy C^k a g jest klasy C^ℓ. Ile razy różniczkowalna jest funkcja $f * g$?

Zadanie 4.4. Obliczyć całkę z funkcji xy^2 po zbiorze ograniczonym parabolą $y^2 = 2px$ i prostą $x = p/2$, gdy $p > 0$ jest parametrem.

Zadanie 4.5. Niech $F(t)$ będzie zadana wzorem

$$F(t) = \int_{(x-t)^2 + (y-t)^2 \leq 1} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

Obliczyć $F'(t)$.

Zadanie 4.6. Przypuśćmy, że $F(t)$ jest równa całce z funkcji $f(x,y)$ (ciągłej na $\mathbb{R}^2$) kole $B(0,t)$. Ile wynosi $F'(t)$?

Zadanie 4.7. Znaleźć objętość zbioru ograniczonego powierzchniami $z^2 = xy$, $x^2 + y^2 = 4$.

Zadanie 4.8. Znaleźć objętość zbioru zadanego przez $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} \leq 1$ i $x, y, z > 0$.

Zadanie 4.9. Dla jakich parametrów p, q całka

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1 + |x|^p)(1 + |y|^q)} dxdy$$

jest zbieżna?

Zadanie 4.10. Wykaż, że

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|x|<n,|y<n} \sin(x^2 + y^2) dxdy = \pi,$$

ale

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x^2+y^2\leq 2\pi n} \sin(x^2 + y^2) dxdy = 0,$$

Zadanie 4.11. Niech $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$. Wykaż, że całka podwójna $\iint_{x,y>1} f(x,y)dxdy$ jest rozbieżna, chociaż całki

$$\int_1^\infty \int_1^\infty f(x,y)dxdy, \text{ oraz } \int_1^\infty \int_1^\infty f(x,y)dydx$$

są zbieżne.

Przydatne wzory:

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\arctan x.$$

Z czego wynika, że

$$\int \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} dx = \frac{-x}{x^2+y^2}.$$

5. Zadania od 11.04 do 23.04

Zadanie 5.1 (już zrobione)**.** Oblicz długość krzywej $(e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t, e^{-t})$, dla $t \in [0, \infty)$.

Zadanie 5.2. Oblicz pole części powierzchni $z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ wyciętej czterema powierzchniami $x \pm y = \pm 1$.

Zadanie 5.3. Oblicz całkę z funkcji y^2 po części cykloidy sparametryzowanej przez $x = t - \sin t$, $y = \cos t$.

Zadanie 5.4. Oblicz obwód astroidy $x^{2/3} + y^{2/3} = 9$.

Zadanie 5.5. Oblicz całkę z funkcji $x^{4/3} + y^{4/3}$ po astroidzie zadanej przez $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$.

Zadanie 5.6. Oblicz pole powierzchni torusa sparametryzowanego jako $x = (R + r\cos\phi)\cos\theta$, $y = (R + r\cos\phi)\sin\theta$, $z = r\sin\phi$, gdy $R > r > 0$.

Zadanie 5.7. Niech f mierzalna i ograniczona, zaś $a, b, c \in \mathbb{R}$. Wykaż, że

$$\int_S f(ax + by + cz) = \int_{-1}^1 f(u\sqrt{a^2 + b^2 + c^2})\, du,$$

gdzie S jest sferą jednostkową.

Zadanie 5.8. Obliczyć masę półsfery $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $z \geq 0$, której gęstość powierzchiowa w punkcie (x, y, z) wynosi $\frac{r}{z}$.