

Zestaw zadań z Analizy Matematycznej. I. Każde zadanie jest za 5 punktów.

Termin oddania: 17 listopada 2008

Zadania można wręczać osobiście, przez kogoś, wkładać do skrytki
lub przesyłać elektronicznie

Zadanie 1. Oblicz następujące sumy

$$(a) \sum_{j=0}^n j \binom{n}{j}$$

$$(b) \sum_{j=0}^n \frac{1}{j+1} \binom{n}{j}.$$

Zadanie 2. Dany jest ciąg

$$a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Wykaż, że jest on monotoniczny, oraz $a_k \in [0, 1]$, więc ma granicę. Podaj numeryczną wartość tego ciągu z dokładnością do dwóch cyfr po przecinku. Tego nie trzeba wyliczać ręcznie, można napisać programik w swoim ulubionym języku, który to policzy. Ciąg zbiega bardzo wolno.

Zadanie 3. Podaj przykład dwóch ciągów a_n, b_n liczb rzeczywistych takich, że

- $\lim a_n = \infty$ oraz $\lim b_n = \infty$.
- Granica $\lim \frac{a_n}{b_n}$ istnieje i wynosi g .
- Granica $\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ istnieje i wynosi h .
- g i h są różne.

Pokaż jawnie, które założenia reguły Stolza nie są spełnione.

Zadanie 4. Dla dwóch liczb rzeczywistych dodatnich a i b określamy dwa ciągi a_n, b_n w następujący sposób:

- $a_1 = a, b_1 = b$;
- $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n), b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$.

Wykaż, że oba te ciągi są zbieżne do tej samej granicy γ (nazywanej średnią arytmetyczno-geometryczną).

(*) Oblicz γ jeśli $a = 2$ i $b = 4$. Wskazówka: rozważ okrąg o promieniu 1 i ciąg odwrotności pól 2^n -kątników odpowiednio wpisanych i opisanych na tym okręgu.