

Zapłątane kolory i zapłątane wielomiany, czyli rzecz o węzłach

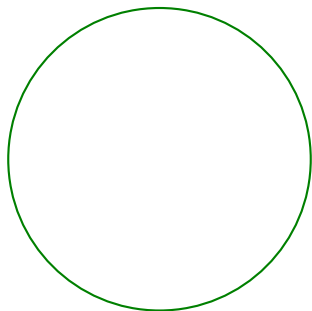
Maciej Borodzik

www.mimuw.edu.pl/~mcboro

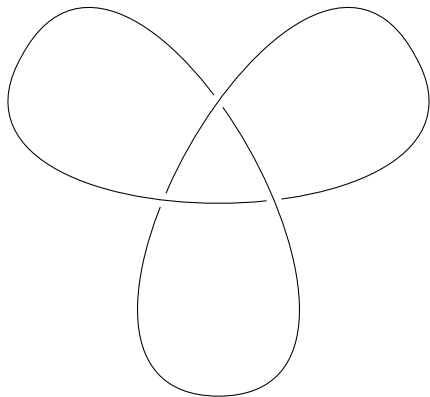
Uniwersytet Warszawski, wydział MIM

14 kwietnia 2018

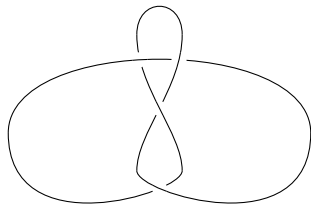
Węzeł trywialny



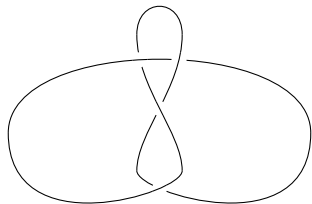
Trójlistnik



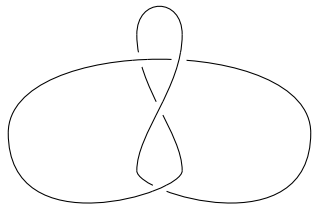
Węzeł ósemkowy



Węzeł trywialny



Trójlistnik



Niezmiennik:

- Taki sam dla tych samych węzłów.
- Możliwie inny dla różnych.
- Łatwy do policzenia.
- Dający się zrozumieć.

Niezmiennik:

- Taki sam dla tych samych węzłów.
- **Możliwie inny dla różnych.**
- Łatwy do policzenia.
- Dający się zrozumieć.

Niezmiennik:

- Taki sam dla tych samych węzłów.
- Możliwie inny dla różnych.
- Łatwy do policzenia.
- Dający się zrozumieć.

Niezmiennik:

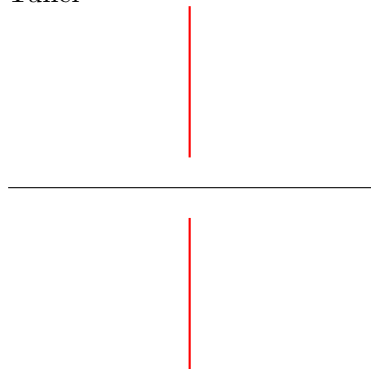
- Taki sam dla tych samych węzłów.
- Możliwie inny dla różnych.
- Łatwy do policzenia.
- **Dający się zrozumieć.**

Na diagramie węzła mamy skrzyżowania.

Na diagramie węzła mamy skrzyżowania.

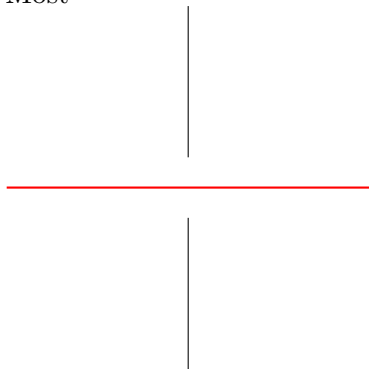
Na diagramie węzła mamy skrzyżowania.

Tunel

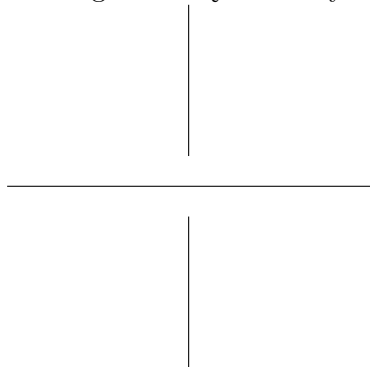


Na diagramie węzła mamy skrzyżowania.

Most



Na diagramie węzła mamy skrzyżowania.

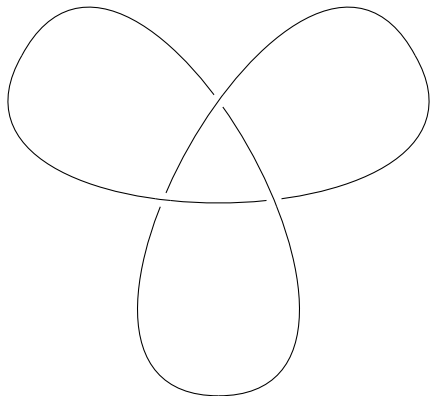


Od tunelu do tunelu

Dla danego węzła (jego diagramu) możemy podzielić go na fragmenty idące od tunelu do tunelu.

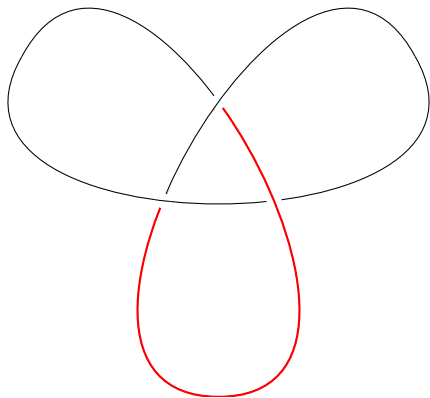
Od tunelu do tunelu

Dla danego węzła (jego diagramu) możemy podzielić go na fragmenty idące od tunelu do tunelu.



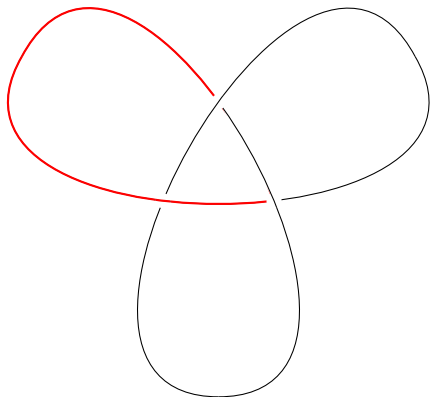
Od tunelu do tunelu

Dla danego węzła (jego diagramu) możemy podzielić go na fragmenty idące od tunelu do tunelu.



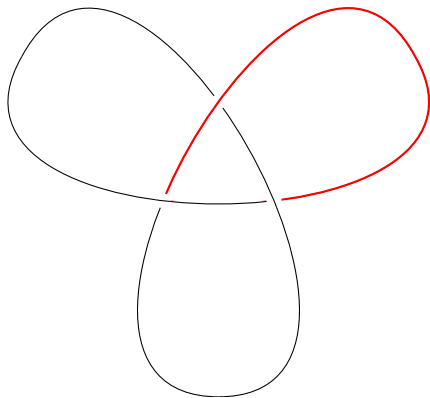
Od tunelu do tunelu

Dla danego węzła (jego diagramu) możemy podzielić go na fragmenty idące od tunelu do tunelu.



Od tunelu do tunelu

Dla danego węzła (jego diagramu) możemy podzielić go na fragmenty idące od tunelu do tunelu.



Reguła

Każdy fragment od tunelu do tunelu jest pokolorowany na jeden z trzech kolorów: czerwony, zielony albo niebieski.

Reguła

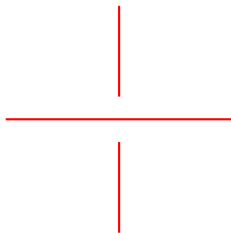
Każdy fragment od tunelu do tunelu jest pokolorowany na jeden z trzech kolorów: czerwony, zielony albo niebieski.

Reguła

W każdym skrzyżowaniu spotykają się albo trzy kolory, albo jeden.

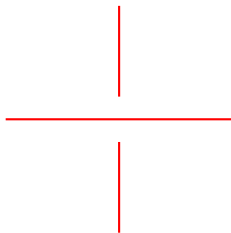
Wyjaśnienie

Możliwy

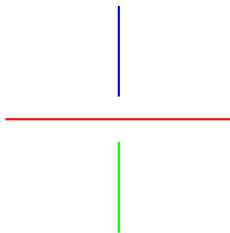


Wyjaśnienie

Możliwy

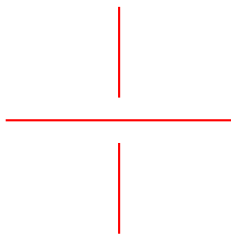


Możliwy

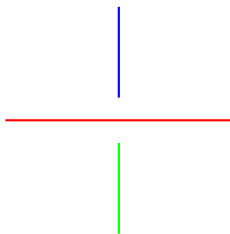


Wyjaśnienie

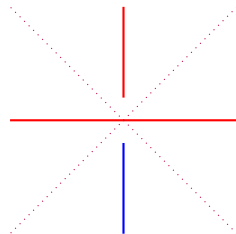
Możliwy



Możliwy



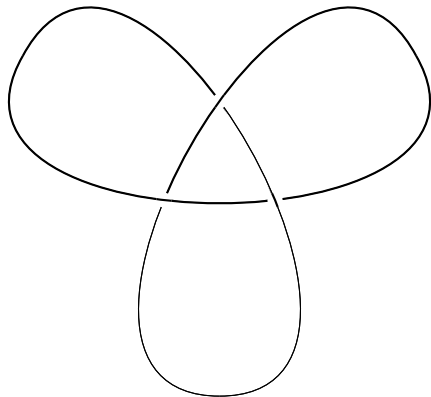
Niemożliwy



Liczmy możliwe kolorowania trójlistnika

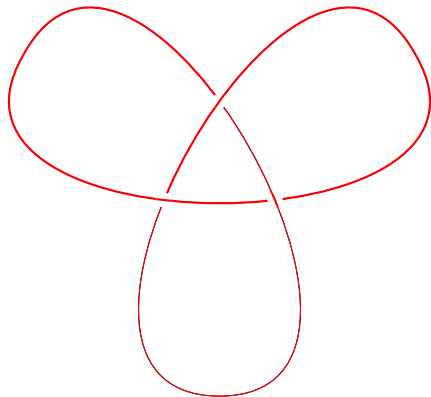
Liczmy możliwe kolorowania trójlistnika

Kolorowanie całego trójlistnika jednym kolorem



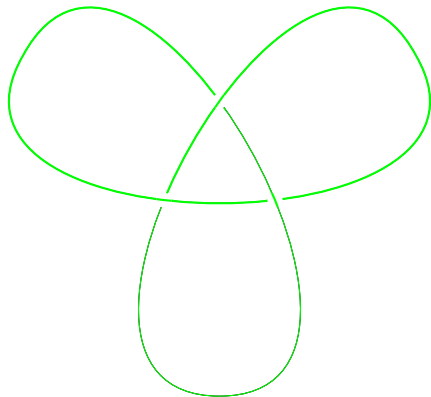
Liczmy możliwe kolorowania trójlistnika

Kolorowanie całego trójlistnika jednym kolorem



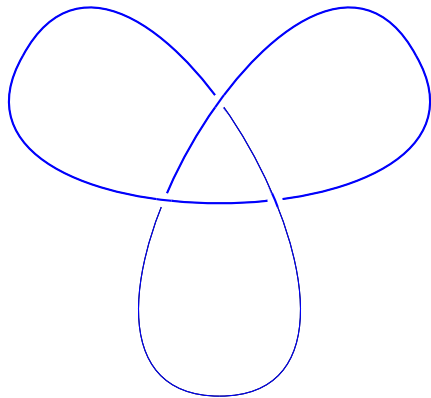
Liczmy możliwe kolorowania trójlistnika

Kolorowanie całego trójlistnika jednym kolorem



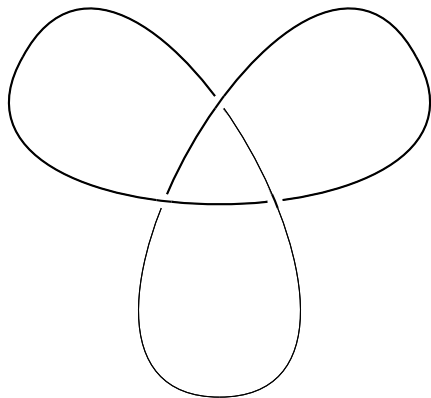
Liczmy możliwe kolorowania trójlistnika

Kolorowanie całego trójlistnika jednym kolorem



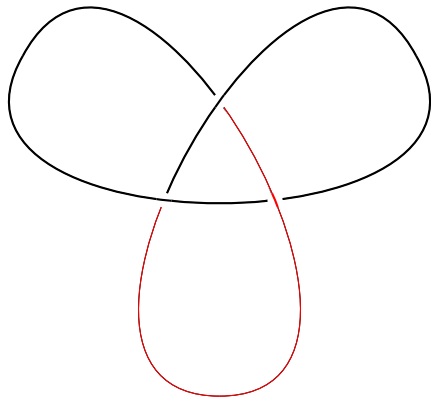
Liczmy możliwe kolorowania trójlistnika

A może są inne?



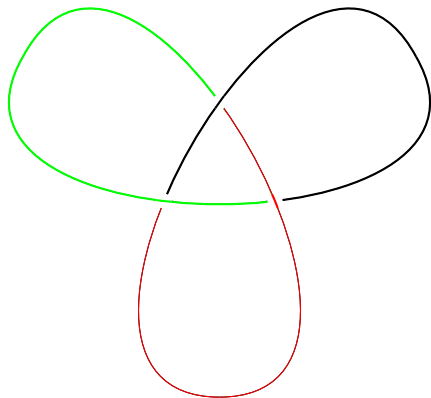
Liczmy możliwe kolorowania trójlistnika

Zaczynamy od czerwonego.



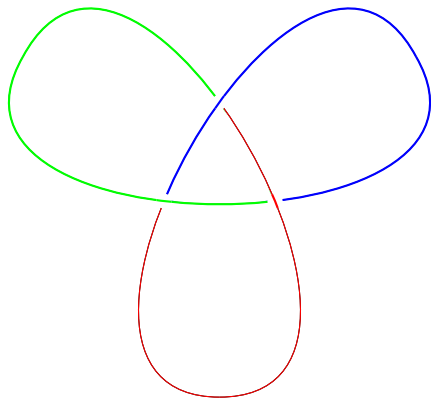
Liczmy możliwe kolorowania trójlistnika

Dodajemy zielony.



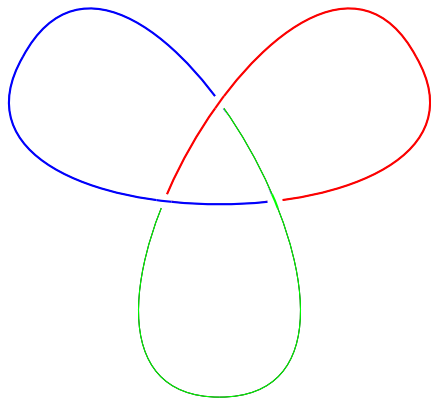
Liczmy możliwe kolorowania trójlistnika

I niebieski pasuje.



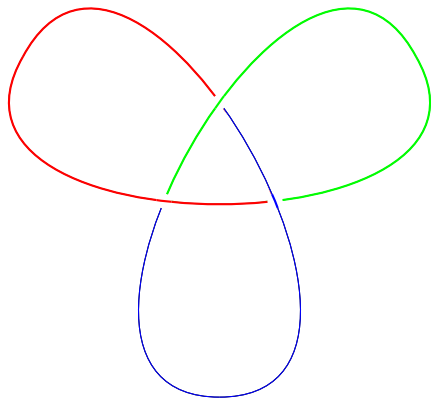
Liczmy możliwe kolorowania trójlistnika

A teraz można permutować kolory.



Liczmy możliwe kolorowania trójlistnika

W sumie jest 6 nietrywialnych kolorowań.

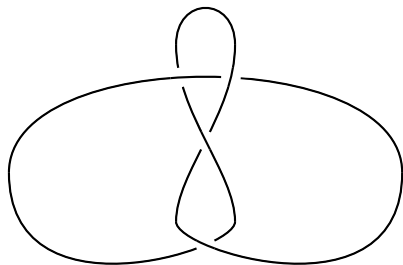


A węzeł ósemkowy?

Mamy kolorowania jednym kolorem.

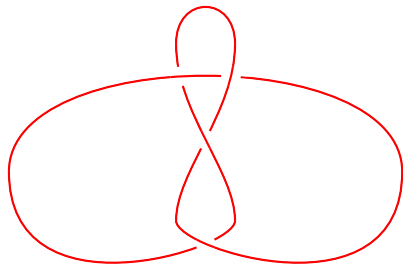
A węzeł ósemkowy?

Mamy kolorowania jednym kolorem.



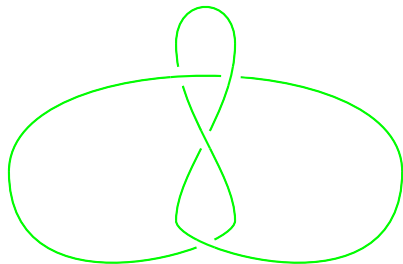
A węzeł ósemkowy?

Mamy kolorowania jednym kolorem.



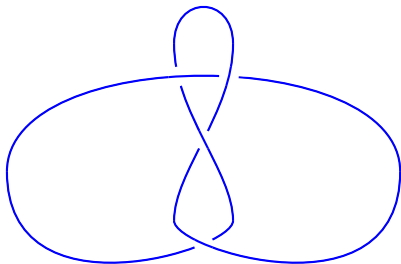
A węzeł ósemkowy?

Mamy kolorowania jednym kolorem.



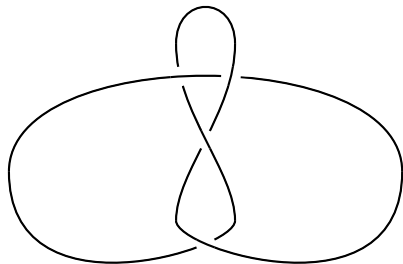
A węzeł ósemkowy?

Mamy kolorowania jednym kolorem.



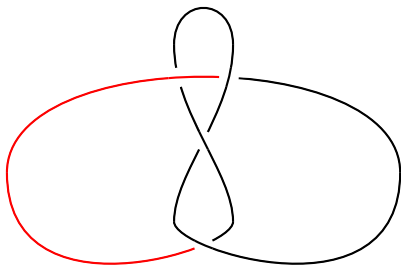
A węzeł ósemkowy?

Czy są inne?



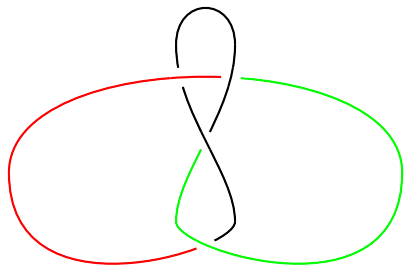
A węzeł ósemkowy?

Zaczynamy od czerwonego.



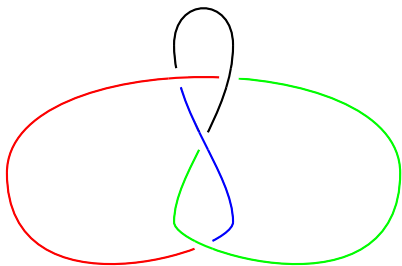
A węzeł ósemkowy?

Dalej zielony.



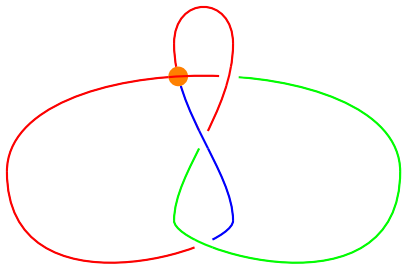
A węzeł ósemkowy?

Niebieski.



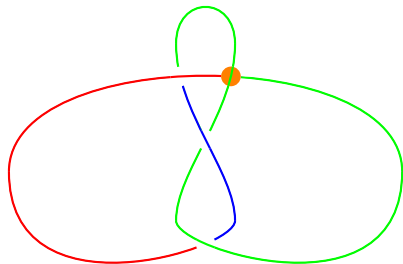
A węzeł ósemkowy?

Ostatni nie jest czerwony.



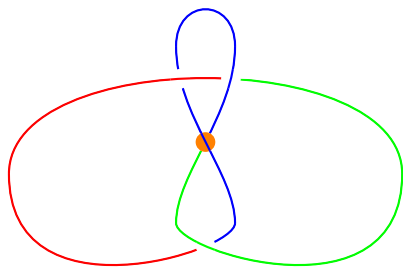
A węzeł ósemkowy?

Ani zielony.



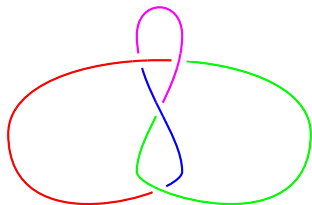
A węzeł ósemkowy?

Ani niebieski.

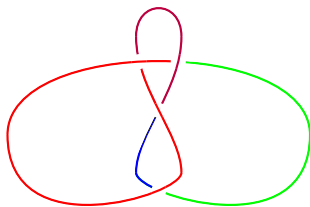


A może 4 kolory?

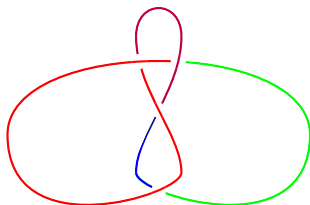
Dla ósemkowego potrafimy pokolorować.



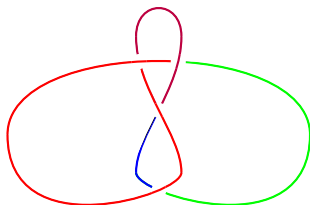
“Figure Ain’t Knot”



Oszukany ósemkowy



Oszukany ósemkowy



- Zwykle kółko możemy pokolorować czterema kolorami na 4 sposoby.

- Zwykle kółko możemy pokolorować czterema kolorami na 4 sposoby.
- Zmieniony węzeł trywialny możemy pokolorować na 28 sposobów.

- Zwykle kółko możemy pokolorować czterema kolorami na **4 sposoby**.
- Zmieniony węzeł trywialny możemy pokolorować na **28 sposobów**.
- Liczba kolorowań czterema kolorami zależy od sposobu narysowania węzła.

- Zwykle kółko możemy pokolorować czterema kolorami na 4 sposoby.
- Zmieniony węzeł trywialny możemy pokolorować na 28 sposobów.
- Liczba kolorowań czterema kolorami zależy od sposobu narysowania węzła.
- Po co nam taki niezmiennik?

- Zwykle kółko możemy pokolorować czterema kolorami na 4 sposoby.
- Zmieniony węzeł trywialny możemy pokolorować na 28 sposobów.
- Liczba kolorowań czterema kolorami zależy od sposobu narysowania węzła.
- Po co nam taki niezmiennik?
- A co z trzema kolorowaniami?

Twierdzenie

Liczba kolorowań trzema kolorami nie zależy od sposobu narysowania wężła.

Trzy kolory rządzą.

Twierdzenie

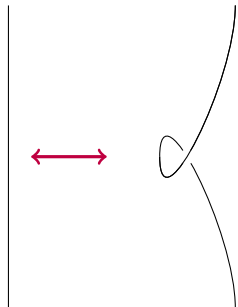
Liczba kolorowań trzema kolorami nie zależy od sposobu narysowania węzła.

Zadanie

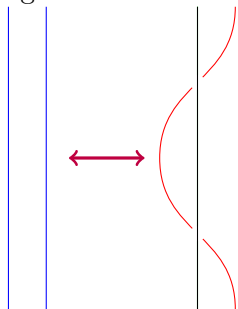
Pokazać, że ta liczba jest potęgą trójki.

Ruchy Reidemeistera, czyli jak zmienić rysunek

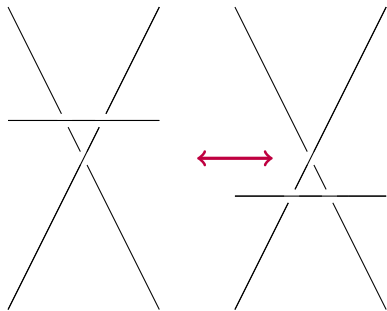
Pierwszy ruch Reidemeistera



Drugi ruch Reidemeistera

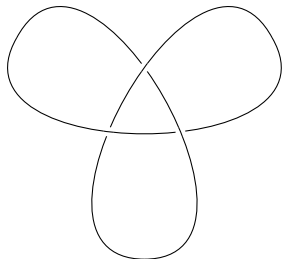
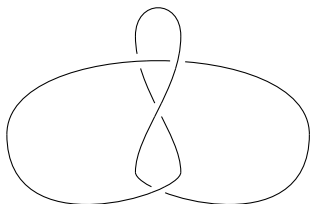


Trzeci ruch Reidemeistera



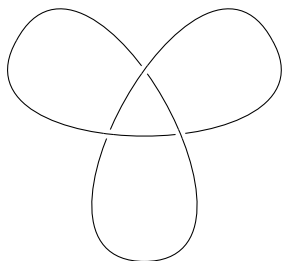
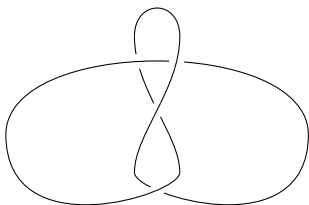
Twierdzenie

Dwa diagramy reprezentują ten sam węzeł wtedy i tylko wtedy, gdy da się przejść od jednego z nich do drugiego za pomocą ruchów Reidemeistera.



Twierdzenie

Dwa diagramy reprezentują ten sam węzeł wtedy i tylko wtedy, gdy da się przejść od jednego z nich do drugiego za pomocą ruchów Reidemeistera.



Jak przejść od jednego do drugiego?

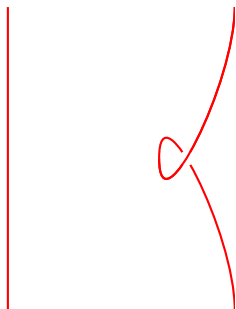
Ruchy Reidemeistera i kolorowania

Twierdzenie

Ruchy Reidemeistera nie zmieniają liczby możliwych kolorowań dla 3 kolorów.

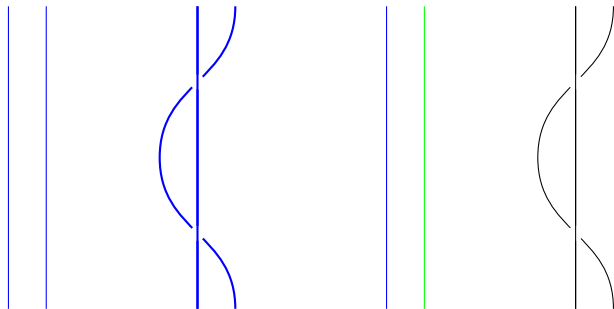
Ruch Reidemeistera 1



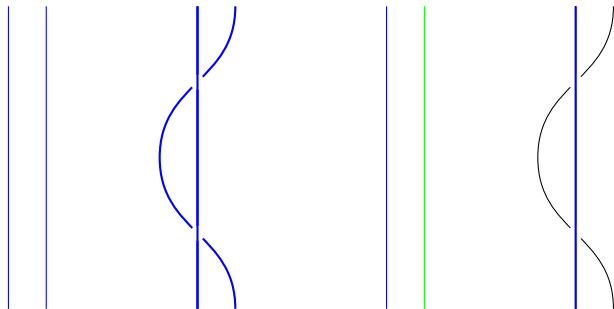


Kolor nowego fragmentu jest wyznaczony jednoznacznie.

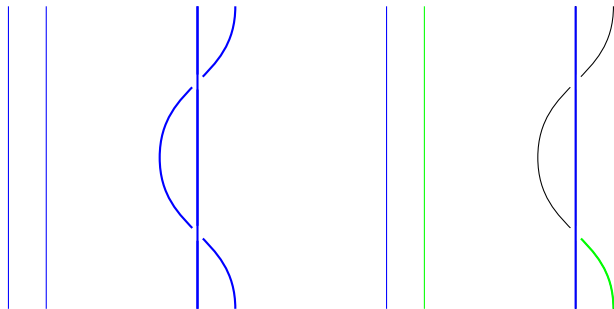
Ruch Reidemeistera 2



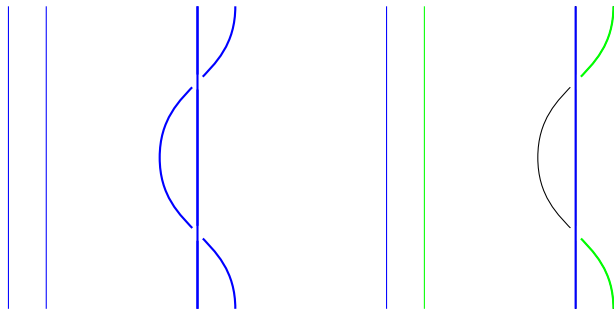
Ruch Reidemeistera 2



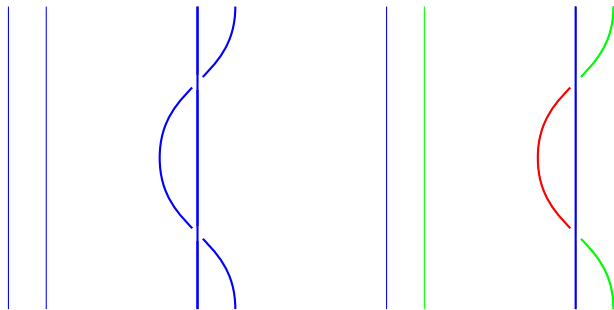
Ruch Reidemeistera 2



Ruch Reidemeistera 2

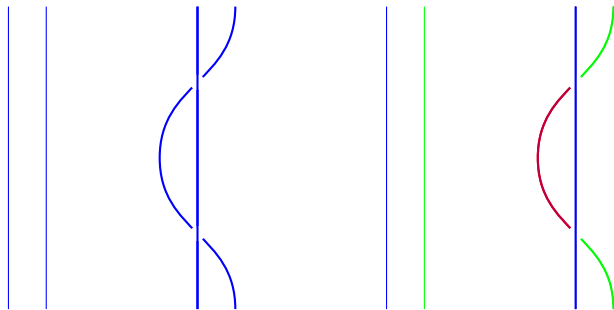


Ruch Reidemeistera 2



Kolor jest wewnętrznego łuku jest wyznaczony jednoznacznie.

Ruch Reidemeistera 2



Ale psuje się gdy są więcej niż 3 kolory.

Trzeci ruch Reidemeistera

Pozostawiamy sprawdzenie jako ćwiczenie.

Twierdzenie

Trójlistnik nie da się rozplątać, bo ma inną liczbę kolorowań (9) niż węzeł trywialny (3).

Twierdzenie

Trójlistnik nie da się rozplątać, bo ma inną liczbę kolorowań (9) niż węzeł trywialny (3).

Pytanie

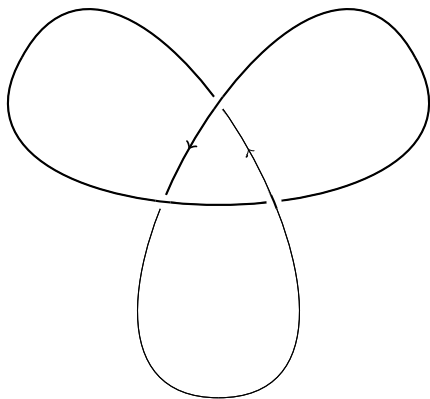
Co z węzłem ósemkowym?

- Można użyć większej liczby kolorów, tylko trzeba dopasować regułę.

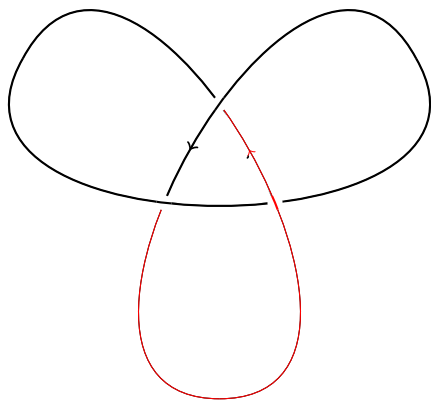
- Można użyć większej liczby kolorów, tylko trzeba dopasować regułę.
- Reguła jest dobra, jeśli jest zachowana przez ruchy Reidemeistera.

- Można użyć większej liczby kolorów, tylko trzeba dopasować regułę.
- Reguła jest dobra, jeśli jest zachowana przez ruchy Reidemeistera.
- Można użyć nieskończenie wielu kolorów: na przykład punkt opisany przez współrzędne (R, G, B) odpowiadające składowym.

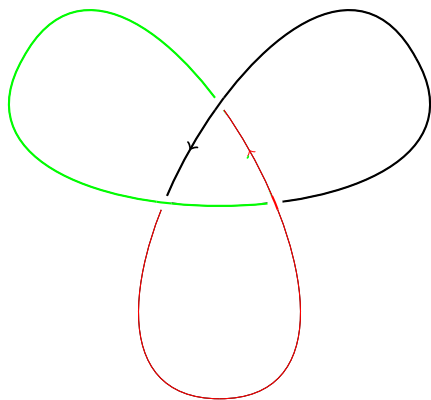
- Można użyć większej liczby kolorów, tylko trzeba dopasować regułę.
- Reguła jest dobra, jeśli jest zachowana przez ruchy Reidemeistera.
- Można użyć nieskończenie wielu kolorów: na przykład punkt opisany przez współrzędne (R, G, B) odpowiadające składowym.
- Odpowiedni wybór koloru pozwala rozróżnić węzły.



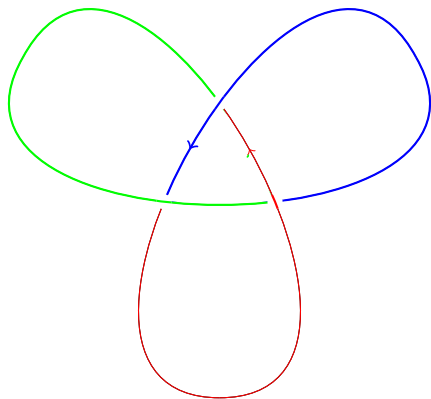
Kolorowe wielomiany: zaawansowane



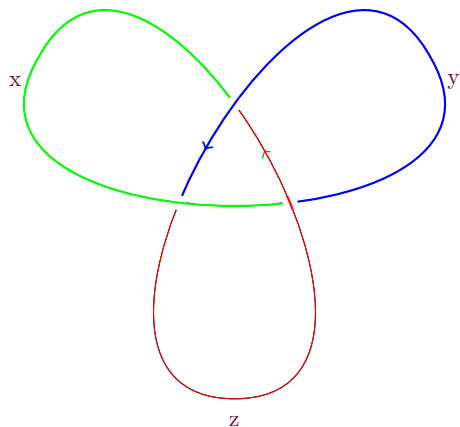
Kolorowe wielomiany: zaawansowane



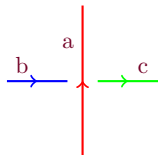
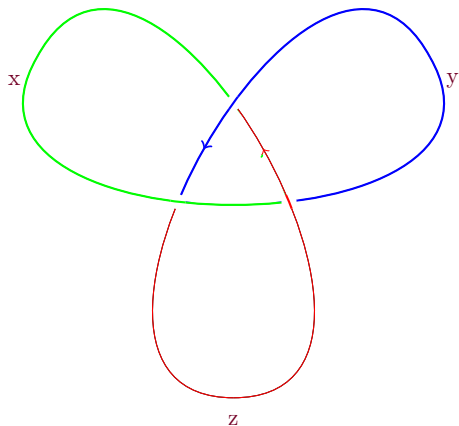
Kolorowe wielomiany: zaawansowane



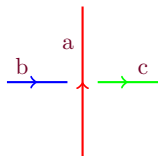
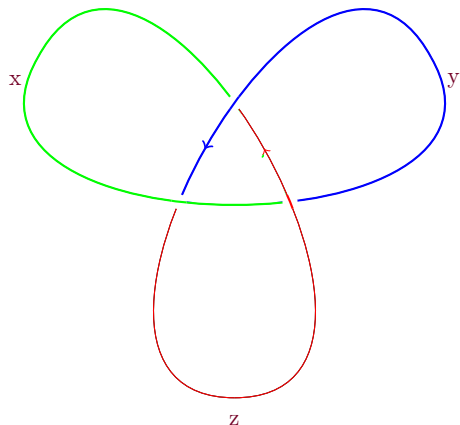
Kolorowe wielomiany: zaawansowane



Kolorowe wielomiany: zaawansowane

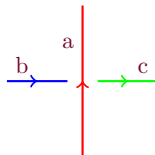
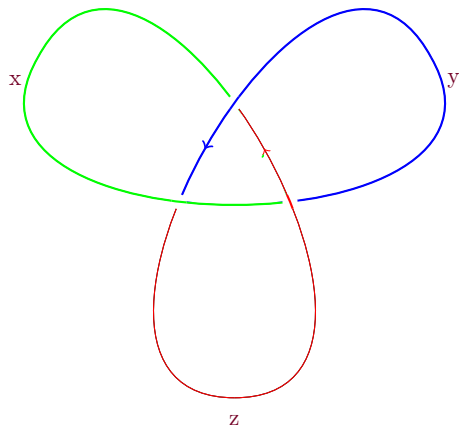


Kolorowe wielomiany: zaawansowane



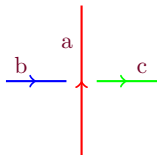
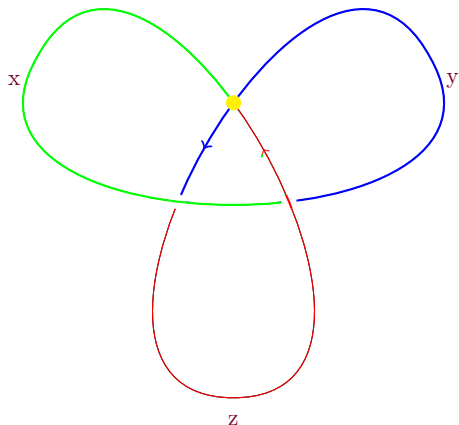
- W każdym skrzyżowaniu piszemy $ba = ac$.

Kolorowe wielomiany: zaawansowane



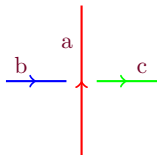
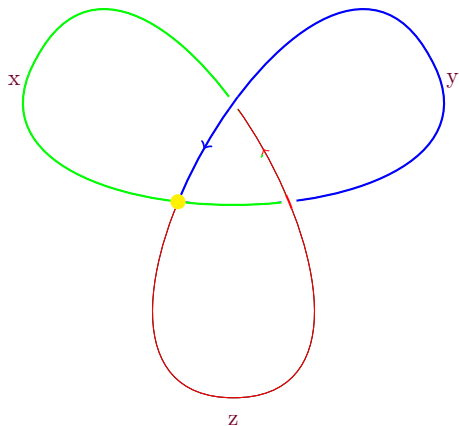
- W każdym skrzyżowaniu piszemy $ba = ac$.
- W naszym przypadku mamy:

Kolorowe wielomiany: zaawansowane



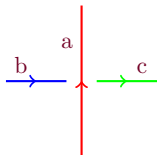
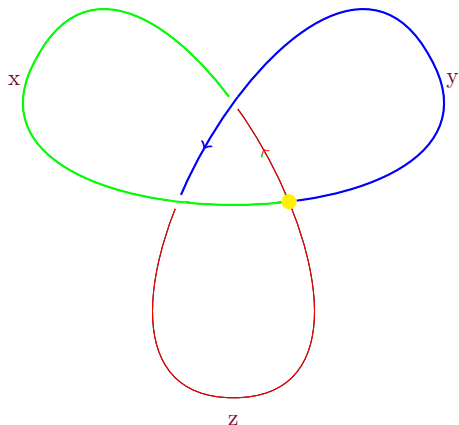
- W naszym przypadku mamy:
- $zy = yx$;

Kolorowe wielomiany: zaawansowane



- $zy = yx$;
- $yx = xz$;

Kolorowe wielomiany: zaawansowane



- $zy = yx$;
- $yx = xz$;
- $xz = zy$ (wynika z poprzednich).

- Trójce x, y, z przypisujemy obroty w przestrzeni \mathbb{R}^3 o jakiś kąt.

Kolorowanie obrotami

- Trójce x, y, z przypisujemy obroty w przestrzeni \mathbb{R}^3 o jakiś kąt.
- Chcemy aby zy, yx i xz były tymi samymi obrotami.

Kolorowanie obrotami

- Trójce x, y, z przypisujemy obroty w przestrzeni \mathbb{R}^3 o jakiś kąt.
- Chcemy aby zy, yx i xz były tymi samymi obrotami.
- Zliczamy te możliwości.

Kolorowanie obrotami

- Trójce x, y, z przypisujemy obroty w przestrzeni \mathbb{R}^3 o jakiś kąt.
- Chcemy aby zy, yx i xz były tymi samymi obrotami.
- Zliczamy te możliwości.
- Można to uogólnić. Nie zależy od diagramu.

Kolorowanie obrotami

- Trójce x, y, z przypisujemy obroty w przestrzeni \mathbb{R}^3 o jakiś kąt.
- Chcemy aby zy, yx i xz były tymi samymi obrotami.
- Zliczamy te możliwości.
- Można to uogólnić. Nie zależy od diagramu.
- To jest bardzo poważny niezmiennik węzła.