Równania różniczkowe zwyczajne

Zadania domowe – seria 5 (treningowa)

Zadanie 1. Znaleźć całkę pierwszą następujących układów

a.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sqrt{x^2 - y} \\ \dot{y} &= 2x(1 + \sqrt{x^2 - y}). \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - e^x \\ \dot{y} &= y^2. \end{aligned}$$

Zadanie 2. Naszkicować portret fazowy równania

$$x'' = -\tfrac{1}{2}V'(x), \qquad \text{gdzie} \quad V(x) = xe^x.$$

Zadanie 3. Niech f będzie funkcją ciągłą taką, że $|f| \leq \frac{c}{t^{1+a}}$, $a > 0$. Pokazać, że równanie

$$y'' + (1 + f(t))y = 0$$

ma bazę rozwiązań postaci $y_1(t) = \cos t + O(t^{-a})$, $y_1(t) = \sin t + O(t^{-a})$.

Zadanie 4. Znaleźć punkty osobliwe następujących równań i zbadać ich stabilność

a.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - x^2 - x \\ \dot{y} &= 3x - x^2 - y. \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \sin(x + y). \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= e^y - e^x \\ \dot{y} &= \sqrt{3x + y^2} - 2. \end{aligned}$$

Zadanie 5. Zbadać (asymptotyczną) stabilność punktu $(0,0)$ w następujących układach

a.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^3 - y \\ \dot{y} &= x + y^3.\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2y^3 - x^5 \\ \dot{y} &= -x - y^3 + y^5.\end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= xy - x^3 + y^3 \\ \dot{y} &= x^2 - y^3.\end{aligned}$$

d.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2y - x - y^3 \\ \dot{y} &= x - 2y.\end{aligned}$$

Zadanie 6. Niech $a(t)$ będzie funkcją ciągłą taką, że $\int_0^\infty a(t)dt < +\infty$. Pokazać, że $x = 0$ jest stabilnym punktem osobliwym równania $x' = a(t)x$.

Zadanie 7. Niech $x' = A(t)x$ będzie równaniem liniowym w n-wymiarowej przestrzeni fazowej ($x \in \mathbb{R}^n$).

a. Pokazać, że jeżeli każde rozwiązanie jest ograniczone dla $t \to +\infty$ to punkt $x = 0$ jest stabilnym punktem osobliwym.

b. Pokazać, że jeżeli każde rozwiązanie dąży do zera przy $t \to +\infty$ to punkt $x = 0$ jest asymptotycznie stabilnym punktem osobliwym.

c. Niech $\lim_{t\to+\infty} trA(t) = b > 0$. Pokazać, że punkt $x = 0$ nie jest stabilnym punktem osobliwym.

Zadanie 8. Pokazać, że jeżeli wszystkie rozwiązania równania $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ dążą do zera wraz z pochodną przy $t \to +\infty$ to $\int_0^{+\infty} p(t)dt = +\infty$.

Zadanie 9. Dane jest równanie z warunkiem początkowym:

$$y'' - x^2y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Pokazać, że rozwiązanie $y(t)$ jest funkcją parzystą oraz $y(t) > 0$ dla każdego t.

<u>Zadanie 10.</u> Pokazać, że dowolne rozwiązanie równania $y'' + xy = 0$ ma na przedziale $[-25, 25]$ co najmniej 15 miejsc zerowych.

<u>Zadanie 11.</u> Niech $q(x)$ będzie funkcją ciągłą taką, że $q(x) \leq 0$. Pokazać, że zagadnienie

$$y'' + q(x)y = 0, \qquad y(x_1) = a, \quad y(x_2) = b$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie dla dowolnych a, b oraz $x_1 \neq x_2$. Pokazać, że jeżeli $b = 0$ to rozwiązanie jest funkcją monotoniczną.