Równania różniczkowe zwyczajne

Zadania domowe – seria 4

Następujące zadania: **1.(4), 3.b, 8.b** są obowiązkowe
Termin oddania: 29 kwietnia 2011

Zadanie 1. Rozwiązać następujące układy równań liniowych o stałych współczynnikach. Przeanalizować zachowanie rozwiązań przy $t \to \pm\infty$.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + y \\ \dot{y} &= 3x + 4y \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - 2y - z \\ \dot{y} &= y - x + z \\ \dot{z} &= x - z \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - y - z \\ \dot{y} &= x + y \\ \dot{z} &= 3x + z \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - y + z \\ \dot{y} &= x + y - z \\ \dot{z} &= 2z - y \end{aligned} \tag{4}$$

Zadanie 2.

Dla jakich a, b rozwiązania równania $\ddot{x} + a\dot{x} + bx$ dążą do zera przy $t \to +\infty$? Dla jakich a, b rozwiązania są ograniczone na całej prostej?

Zadanie 3. Rozwązać następujące równania drugiego rzędu:

a. $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 0$,

b. $\ddot{x} - x = 2e^t - t^2$,

c. $\ddot{x} + \dot{x} - 2x = te^t$,

d. $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = \frac{e^t}{t}$,

e. $\ddot{x} + x = \frac{1}{\sin t}$

Zadanie 4. Rozwiązać następujące układy równań niejednorodnych metodą uzmienniania stałych:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2y - x \\ \dot{y} &= 4y - 3x + \frac{e^{3t}}{e^{2t} + 1} \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - y + \frac{1}{\cos t} \\ \dot{y} &= 2x - y\end{aligned} \tag{6}$$

Zadanie 5.

Pojęcie eksponenty można rozważać oczywiście nie tylko dla macierzy, ale także dla przekształceń liniowych. Wówczas w definicji e^A (gdzie $A : X \to X$ jest przekształceniem w pewnej przestrzeni liniowej X) zamiast $n-tej$ potęgi macierzy trzeba brać $n - te$ złożenie przekształcenia.

Niech X będzie przestrzenią wielomianów stopnia nie większego niż n. Wówczas X jest przestrzenią liniową nad R. Rozważmy przekształcenie liniowe $A : X \to X, A(p) = \frac{dp}{dx}$. (Czyli przekształcenie A zamienia wielomian p na jego pochodną, np $A(x^3 - 2x^2 + 3) = 3x^2 - 4x)$. Zauważmy że A^{n+1} jest przekształceniem zerowym, więc e^{At} jest w istocie skończoną sumą. Ile jest równe $e^{At}(p)$?

Zadanie 6. Punkt materialny o masie m porusza się po osi Ox pod wpływem siły sprężystości równej $-ax$ ($a > 0$), siły oporu ośrodka równej $-b\dot{x}$ i siły zewnętrznej zależnej od czasu $F(t) = M\sin(\omega t)$. Opisać ruch tego punktu materialnego.

Zadanie 7. Znaleźć rozwiązanie równania $\ddot{y}+k^2y = f(t)$ spełniające zerowe warunki początkowe, to znaczy $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$.

Zadanie 8. Napisać liniowe równanie jednorodne mające następującą bazę rozwiązań:

a. $y_1 = e^{-t}, \quad y_2 = e^{3t},$

b. $y_1 = e^{-t}\sin 2t, \quad y_2 = e^{-t}\cos 2t, \quad y_3 = e^t.$

Zadanie 9. Rozwiązać nastę pujące równania (w których niewiadomą jest funkcja $x(t)$).

a. $\ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = 0$

b. $4\ddot{x} + 4\dot{x} + x = 0$

c. $x^V + 8\dddot{x} + 16\dot{x} = 0$

d. $x^{IV} + 2\ddot{x} + x = 0$

Zadanie 10. Wykazać że dla równania liniowego w $\mathbb{R}^n$: $\dot{x} = Ax$ (gdzie A jest pewną macierzą kwadratową) następujące warunki są równoważne

a. Istnieje rozwiązanie, które jest stabilne w sensie Lapunowa

b. Każde rozwiązanie jest stabilne w sensie Lapunowa