Równania różniczkowe zwyczajne

Zadania domowe – seria 3

Następujące zadania: **2a, 3a, 4a, 6** są obowiązkowe
Termin oddania: 8 kwietnia 2011

Zadanie 1. Pokazać że rozwiązanie równania

$$\dot{x} = \frac{1}{x} + 2t, x(0) = 1$$

jest określone na całej półprostej $[0, \infty)$. Podać dolne ograniczenie $x(t)$.
Zadanie 2. Rozwiązać następujące równania (w postaci różniczek zupełnych)

a. $3x^2(1 + \log y)dx = (2y - \frac{x^3}{y})dy$

b. $(1 + y^2 \sin 2x)dx = (2y - \frac{x^3}{y})dy$

Zadanie 3. Znaleźć wszystkie rozwiązania podanych równań z podanymi warunkami początkowymi

a. $y' = \sqrt{|\sin y|}, x_0 = 0, y_0 = 0, |x| < \sqrt{\pi}$

b. $y' = \sqrt{|\sin y|}, x_0 = 0, y_0 = 0$

c. $y' = 1 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{y - x}, x_0 = 0, y_0 = 0$

d. $y' = -3x\sqrt[3]{y}, x_0 = 1, y_0 = 0$

Zadanie 4. Rozwiązać równania znajdując czynnik całkujący postaci $\mu(x)$ lub $\mu(y)$

a. $(1 - x^2y)dx + x^2(y - x)dy = 0$

b. $(x^2 + y)dx - xdy = 0$

Zadanie 5. Znaleźć czynniki całkujące i rozwiązać równania.

a. $(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0$ (wsk: podzielić przez $x^2 + y^2$)

b. $(x^2 + y^2 + y)dx - xdy = 0$

c. $(y - \frac{1}{x})dx + \frac{dy}{y} = 0$

Zadanie 6. Rozważmy równanie zależne od parametru μ:

$$\dot{x} = \frac{x}{t} + \mu t e^{-x}$$

z warunkiem początkowym $x(1) = 1$. Znaleźć $\frac{\partial x}{\partial \mu}_{|\mu=0}$

Zadanie 7. Rozważmy równanie Riccatiego

$$y' + p(x)y + q(x) = y^2$$

gdzie $p(x), q(x)$ są funkcjami ciągłymi i okresowymi z okresem T, określonymi w $\mathbb{R}$. Wykazać że to równanie ma co najwyżej dwa różne rozwiązania okresowe z tym samym okresem T. (wsk: można napisać równanie różniczkowe spełnione przez różnicę rozwiązań)

Zadanie 8. Niech f będzie funkcją ciągła w prostokącie $|x - x_0| < a$, $|y - y_0| < b$. Załózmy ponadto że f jest nierosnąca ze względu na y. Wykazać że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje co najwyżej jedno rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego:

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

określone na odcinku $[x_0, x_0 + \varepsilon]$.

wsk. niech y_1, y_2 będą dwoma rozwiązaniami. Jakie równanie różniczkowe spełnia funkcja $(y_1 - y_2)^2$?

Zadanie 9. Rozważmy równanie różniczkowe w $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dot{x} = xy + t^2 \\ 2\dot{y} = -y^2 \end{cases}$$

z warunkiem początkowym $x(1) = x_0 = 3$, $y(1) = y_0 = 2$. Znaleźć pochodną (cząstkową) rozwiązania względem warunku początkowego:

$$\frac{\partial x}{\partial y_0}_{|(x_0=3,y_0=2)}(t)$$