Równania różniczkowe zwyczajne

Zadania domowe – seria 2

Następujące zadania: **1.f, 4.d, 4.e, 8** są obowiązkowe
Termin oddania: 18 marca 2011

Zadanie 1. Stosując poznane metody rozwiązać następujące równania

a. $ty' + t^2 + ty - y = 0$,

b. $2ty' + y^2 = 1$,

c. $y' - \frac{y}{t} = \frac{1}{2y}$,

d. $y' + 2ty = 2t^3y^3$,

e. $t^2y' = t^2y^2 + ty + 1$,

f. $y' + y^2 = -\frac{1}{4t^2}$,

g. $y' = y^2 - ty - t$,

h. $2t^2y' = y^3 + ty$,

i. $y' = 2(\frac{y+2}{t+y-1})$.

Zadanie 2. Znaleźć krzywe, dla których długość odcinka łączącego początek układu współrzędnych z punktem przecięcia stycznej do krzywej i osi y równa jest kwadratowi współrzędnej y punktu styczności.

Zadanie 3. Dla jakich wartości parametru a równanie $y' = |y|^a$ nie ma własności jednoznaczności rozwiązania. Opisać punkty, w których nie zachodzi jednoznaczność.

Zadanie 4. Opisać punkty, w których następujące równania nie mają własności jednoznaczności rozwiązania

a. $y' = \sqrt[3]{y^2}$,

b. $y' = y\sqrt[3]{y+1}$,

c. $y' = (y-1)\sqrt{y^3}$,

d. $y' = y\log|y|$ (w punkcie 0 dookreślamy prawą stronę warunkiem ciągłości),

e. $y' = y(\log|y|)^2$ (w punkcie 0 dookreślamy prawą stronę warunkiem ciągłości),

f. $y' = 1 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{y-t}$.

Zadanie 5. Znaleźć wszystkie krzywe na płaszczyźnie o tej własności, że odległość stycznej od początku układu współrzędnych jest równa współrzędnej x punktu styczności.

Zadanie 6. Dla jakich wartości parametru a każde rozwiązanie równania przedłuża się na całą prostą $t \in (-\infty, +\infty)$?

a. $y' = |y|^a$,

b. $y' = (y^2 + e^t)^a$,

c. $y' = |y|^{a-1} + (t\sqrt[3]{y})^{2a}$.

Zadanie 7. Znaleźć krzywe prostopadłe do rodziny krzywych $y^2 = Ce^x + x + 1$, gdzie $C \in \mathbb{R}$.

Zadanie 8. Wykazać, że tylko jedno rozwiązanie równania $ty' = (2t^2+1)y + t^2$ ma skończoną granicę przy $t \to \infty$. Zapisać to rozwiązanie za pomocą formuły całkowej i obliczyć tę granicę.

Zadanie 9. Znaleźć rozwiązanie równania $y' \sin 2t = 2(y + \cos t)$, które jest ograniczone dla $t \to \frac{\pi}{2}$.

Zadanie 10. Wykazać, że równanie

$$y' = \tan t \cdot \sin |ty|, \qquad y(t_0) = y_0$$

(gdzie $|t_0| < \frac{\pi}{2}$) ma dokładnie jedno rozwiązanie określone na całym przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.