Równania różniczkowe zwyczajne

Zadania domowe – seria 1

Następujące zadania: 2.c, 4.a oraz 5 są obowiązkowe
Termin oddania: 4 marca 2011

Zadanie 1.

a. Piłkę o masie m rzucono w górę z prędkością początkową v_0. Na jaką maksymalną wysokość wzniesie się piłka i po jakim czasie? Nie uwzględniamy oporu powietrza.

b. To samo pytanie, ale bardziej realistyczny model: uwzględniamy siłę oporu powietrza F_o która jest proporcjonalna do kwadratu prędkości: $|F_0| = k|v|^2$.

Zadanie 2.

Stosując (niekoniecznie) odpowiednie podstawienia sprowadzić następujące równania do równań jednorodnych lub do równań o zmiennych rozdzielonych lub równań liniowych i rozwiązać:

a. $\frac{dy}{dx} = \frac{y+2}{2x+y-4}$

b. $x^3(y' - x) = y^2$

c. $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$

d. $tx' = \sqrt{t^2 - x^2} + x$

e. $y' = \frac{1}{x+y-1}$

f. $y' = \sqrt{x^2 - y} + 2x$

g. $y' = y^2(1 + y^2)^2$

h. $xy' - 2y = 2x^4$

i. $x(y' - y) = e^x$

j. $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$

k. $y' - y = 2x - 3$

l. $x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0$

m. $y' + 2y = y^2 e^x$

Zadanie 3. Znaleźć krzywą o tej własności że trójkąt utworzony przez oś OY, styczną do krzywej oraz promień wodzący w punkcie styczności jest trójkątem równoramiennym.

Zadanie 4. Znaleźć wszystkie funkcje ciągłe $y(x)$ takie, że

a. $y(x) = \int_0^x y(t)dt + x + 1$

b. $\int_0^x (x-t)y(t)dt = 2x + \int_0^x y(t)dt$

Zadanie 5. Znaleźć krzywe dla których pole trójkąta ograniczonego przez styczną, oś x i odcinek łączącym początek układu współrzędnych i punkt styczności- jest stałe, równe a^2.

Zadanie 6. Niech $y' = f(x,y)$ będzie równaniem różniczkowym na funkcję $y(x)$. Znaleźć położenie punktów krytycznych rozwiązania $y(x)$ na płaszczyźnie współrzędnych x, y. Jak odróżnić punkty, w których rozwiązanie będzie miało maksimum lokalne od punktu minimum lokalnego. Jak można opisać punkty przegięcia rozwiązania?

Zadanie 7. Spadochroniarz wyskoczył z samolotu na wysokości $1,5$km, a rozłożył spadochron na wysokości $0,5$km. Ile czasu zajęło spadanie do momentu rozłożenia spadochronu? Wiadomo,że maksymalna (graniczna) prędkość spadającego (z nierozłożonym spadochronem) w powietrzu człowieka jest równa $50m/sek$. Siła oporu powietrza jest proporcjonalna do kwadratu prędkości. (Zaniedbujemy więc zmianę gęstości powietrza ze zmianą wysokości.)

Zadanie 8. Niech f będzie funkcją różniczkowalną w $\mathbb{R}$, k_0- niech będzie rozwiązaniem równania $f(k) = k$. Wykazać że jeśli $f'(k_0) > 1$ to nieskończenie wiele rozwiązań równania

$$y' = f(\frac{y}{x})$$

jest stycznych w początku układu współrzędnych do prostej $y = k_0 x$, zaś jeśli $f'(k_0) < 1$ to żadne (poza trywialnym $y = k_0 x$) rozwiązanie nie jest styczne do tej prostej.

Zadanie 9. Sprawdzić że zagadnienie

$$x' = x^2 - 3t^2 - 1$$

z warunkiem początkowym $x(0) = 1$ spełnia założenia twierdzenia Picarda-Lindelofa. Wypisać trzy pierwsze wyrazy przybliżenia rozwiązania $x_0(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ według dowodu twierdzenia Picarda-Lindelofa. Podać jakiś przedział $[-\alpha, \alpha]$, na którym ciąg kolejnych przybliżeń $x_n(t)$ (danych przez dowód twierdzenia Picarda Lindelofa) jest zbieżny jednostajnie do rozwiązania.

Zadanie 10. Znaleźć wszystkie rozwiązania podanych równań z podanymi warunkami początkowymi

$$y' = \sqrt{|\sin y|}, x_0 = 0, y_0 = 0$$

$$y' = 1 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{y - x}, x_0 = 0, y_0 = 0$$

$$y' = -3x\sqrt[3]{y}, x_0 = 1, y_0 = 0$$

Zadanie 11. Wykazać że każda krzywa całkowa równania

$$y' = \sqrt[3]{\frac{y^2 + 1}{x^4 + 1}}$$

ma dwie asymptoty poziome.

Zadanie 12. Rozważmy równanie

$$y' = (y^2 + 1)e^{-x^2}$$

z warunkiem początkowym $y(0) = y_0$. Niech (a, b) będzie maksymalnym odcinkiem na którym jest określone rozwiązanie. Zbadać zależność a, b do y_0. Zbadać istnienie asymptot dla krzywej całkowej, w zależności od y_0.