Różniczkowalny rozkład jedności

Def Pokrycie $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ nazywamy <u>lokalnie sk.</u>

jeżeli $\forall_{p \in M} \; \exists_{U \ni p \text{ (otw.)}}$: U przecina tylko

skończenie wiele zbiorów U_α.

Niech U_α będzie pokryciem otw. M.

Def Różniczkowalnym (gładkim) rozkładem jedności ~~na M nazywamy~~ wpisanym w $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ nazywamy układ gładkich funkcji $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$:

1° $0 \leq \psi_\alpha \leq 1$

2° $\operatorname{supp} \psi_\alpha \subset U_\alpha$

3° $\{\operatorname{supp} \psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ jest lokalnie skończone

4° $\sum_\alpha \psi_\alpha \equiv 1$ na M.

Def Pokrycie $\{V_\beta\}$ nazywamy wpisanym w $\{U_\alpha\}$

jeżeli $\forall_\beta \; \exists_\alpha : \; V_\beta \subset U_\alpha$.

Def Przestrzeń top. M nazywamy <u>parazwartą</u> jeżeli jest T_2 oraz w każde otwarte pokrycie można wpisać pokrycie otwarte lok. sk.

Tw Rozmaitość różniczkowa jest przestrzenią parazwartą.

Wykażemy nieco więcej:

Tw Niech ~~M będzie~~ U_α będzie otw. pokryciem rozmaitości M. Istnieje pokrycie $\{V_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ wpisane w U_α:

1° $\{V_j\}$ jest przeliczalne oraz lok. sk.

2° $V_j \subset$ dziedzinie U_j mapy ϕ_j oraz $\phi_j(V_j) = B(0,3) \subset \mathbb{R}^n$

3° (Przeliczalne) pokrycie $\phi_j^{-1}(B(0,1))$ stanowi pokrycie M.

Tw (R1) Niech $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ będzie otwartym pokryciem rozmaitości M. Istnieje rozkład jedności wpisany w (U_α).

Dw Niech V_α będzie pokryciem wpisanym w U_α takim jak w twierdzeniu.

$$f_j = \begin{cases} H\circ\phi_j & \text{na } V_j \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

$$g_j = \frac{f_j}{\sum_k f_k}$$

(W otoczeniu każdego punktu suma jest skończona (tylko skończenie wiele wyrazów $\neq 0$))

$\forall_p \ \sum f_k(p) > 0$

$\sum_j g_j \equiv 1$

$\forall_j \ \exists_{\alpha\in A} : \ V_j \subset U_\alpha$

$a : \mathbb{N} \to A \qquad j \mapsto \alpha =: a(j)$

$$\psi_\alpha(p) = \sum_{j\in a^{-1}(\alpha)} g_j(p)$$

- jeśli $a^{-1}(\alpha) = \emptyset \Rightarrow \psi_\alpha \equiv 0$
- W otwartym otoczeniu dowolnego punktu powyższa suma jest skończona

$\{\psi_\alpha\}$ jest rozkładem jedności wpisanym w U_α. ∎

Dw twierdzenia topologicznego

Lemat 1 Rozmaitość M posiada pokrycie, lokalnie sk. pokrycie V_j : $\overline{V_j}$ jest zw.

Dw 1° $\exists$ baza topologii $\{B_j\}_{j=1,\dots,\infty}$:

$$\overline{B_j} - \text{zw.}$$

Skonstruujemy pokrycie U_j :

- $\overline{U_j}$ jest zw.
- $\overline{U_j} \subset U_{j+1}$
- $B_j \subset U_j$

Definiujemy pokrycie $\{ V_j = U_{j+2} \setminus \overline{U_j} \} \cup \{ \underset{V_{-1}}{\underset{\shortparallel}{U_1}}, \underset{V_0}{\underset{\shortparallel}{U_2}} \}$.

- $\overline{V_j} \subset \overline{U_{j+2}}$ - zw.
- $\bigcup_{j=-1}^{\infty} V_j$ ~~oth~~ $= M$
- $V_j \cap V_k \cancel{\neq} = \emptyset$ jeśli $|k-j| > 1$

$$\Downarrow$$

~~lokalnie~~ $\{V_j\}$ jest lok. sk.

Konstrukcja $\{U_j\}$ – indukcyjna

- $U_1 = B_1$
- Załóżmy, że mamy $U_1, \dots, U_k$

$$\overline{U_k} - \text{zw.} \Rightarrow U_k \subset B_1 \cup \dots \cup B_{m_k}$$

$$U_K = \bigcup_{1}^{\max(m_k, k)} B_i$$

□

Dowód 2

Dr. tw.

Niech $\mathcal{U}_\alpha$ będzie pokryciem, $\{V_j\}$ pokrycie z dowodu.

$p \in M$. $\exists$ zb. otw. $W_p \ni p$: W_p przecina sk. wiele V_j.

$$\widetilde{W}_p = W_p \cap \Big(\underbrace{\bigcap_{j:\, p \in V_j} V_j}_{\text{sk. } \text{~~suma~~} \text{ przecięcie!}} \Big) \quad - \text{zb. otwarty!}$$

Zatem $p \in V_j \Rightarrow \widetilde{W}_p \subset V_j$

$p \in \mathcal{U}_\alpha$ dla p. α_p $\cancel{\widetilde{\widetilde{W}}_p \subset \widetilde{W}_p \cap \mathcal{U}_{\alpha_p}}$

Niech $\widetilde{\widetilde{W}}_p \subset \widetilde{W}_p \cap \mathcal{U}_{\alpha_p}$:

- $\exists$ mapa $(\mathcal{O}_p, \phi_p)$:

$$\widetilde{\widetilde{W}}_p \subset \mathcal{O}_p, \quad \phi_p(\widetilde{\widetilde{W}}_p) = B(0,3).$$

Niech $U_p = \phi_p^{-1}(B(0,1))$

- $\bigcup_p U_p = M$ (pokrycie)
- $\widetilde{\widetilde{W}}_p \subset \mathcal{U}_{\alpha_p}$ dla p. α_p (wpisane)

Trzeba wybrać podpokrycie przeliczalne, lok. sk.

$\{U_p : p \in \overline{V_j}\}$ – pokrycie zwart. $\overline{V_j}$.

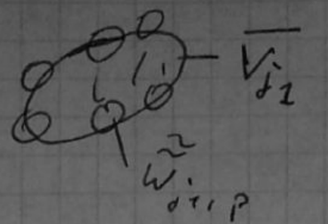
Wybieramy sk., i suma po j. $\to$ przeliczalne pokrycie. Dlaczego odp. $\widetilde{\widetilde{W}}_{j, p_k}$ jest lok. sk.?

$\widetilde{\widetilde{W}}_{j_1 p_1} \cap \widetilde{\widetilde{W}}_{j_2 p_2} \neq \emptyset \quad \widetilde{\widetilde{W}}_{j_1 p_1} \subset V_{l_1} \quad \widetilde{\widetilde{W}}_{j_2 p_2} \subset V_{l_2} \Rightarrow V_{l_1} \cap V_{l_2} \neq \emptyset$

· $V_{l_1} \cap V_{l_2} \neq \emptyset$

· $V_{j_1} \cap V_{l_1} \neq \emptyset$

· $V_{j_2} \cap V_{l_2} \neq \emptyset$



$$\left.\begin{array}{l} p_2 \in \overline{V_{j_1}} \\ p_2 \in \tilde{\tilde{W}}_{j_1} \subset V_{l_1} \end{array}\right\} \Rightarrow V_{j_1} \cap V_{l_1} \neq \emptyset$$

ustalmy j_1 → tylko sk. wiele j_2, które to spełniają. ⇒ lok. skończone ∎