Geometria różniczkowa III

Seria 1, 14 marca 2011

Zadanie 1. Niech γ będzie wiązką liniową nad zespoloną przestrzenią rzutową $\mathbb{C}P^n$. Przestrzeń totalną wiązki z usuniętym cięciem zerowym $\gamma \setminus 0$ można utożsamić z $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ (przestrzeń z wyrzuconym punktem). Niech $p_0 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{n+1}$ oraz niech $H_{p_0} = Span(e_2, \dots, e_{n+1})$ będzie przestrzenią rozpiętą (nad $\mathbb{C}$) przez pozostałe wektory standardowej bazy $\mathbb{C}^{n+1}$.

a. Pokazać, że istnieje dokładnie jedna koneksja na wiązce γ o tej własności, że odpowiadające jej przestrzenie horyzontalne H_p spełniają relację

$$H_{[U \cdot p_0]} = U \cdot H_{p_0}$$

dla dowolnego przekształcenia unitarnego $U \in U(n+1)$.

b. Znaleźć 1-formy tej koneksji w jakiejś bazie trywializacji wiązki γ.

c. Sprawdzić, że 2-forma krzywizny R jest proporcjonalna do 2-formy Fubini-Study generującej drugie kohomologie rozmaitości $\mathbb{C}P^n$.

d. Znaleźć formy koneksji i krzywizny na wiązce stycznej do $\mathbb{C}P^n$ stowarzyszone z opisaną powyżej koneksją na γ.

Zadanie 2. Niech $G = SO(3)$ będzie grupą obrotów przestrzeni 3-wymiarowej. Sprawdzić, że

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

stanowią bazę przestrzeni stycznej $T_e SO(3)$.

a. Pokazać, że istnieje dokładnie jedna metryka *lewoniezmiennicza* dla której baza (E_1, E_2, E_3) jest ortonormalna.

b. Policzyć formę koneksji Levi-Civity oraz formę krzywizny w bazie ortonormalnych, lewoniezmienniczych pól wektorowych na $SO(3)$.

c. Pokazać, że geodezyjne przechodzące przez identyczność (e) pokrywają się z 1-parametrywymi podgrupami $SO(3)$.

Zadanie 3. Wykonać punkty a oraz b poprzedniego zadania w przypadku metryki $\tilde{g}$ dla której

$$\tilde{g}(E_j, E_j) = 1,\ j = 1, 2, 3, \qquad \tilde{g}(E_3, E_1) = 0,\ \tilde{g}(E_3, E_2) = 0,\ \tilde{g}(E_1, E_2) = \frac{1}{2}.$$

Czy punkt c. poprzedniego zadania pozostaje prawdziwy?

Zadanie 4. Znaleźć wszystkie metryki na grupie $SO(3)$, które są zarówno prawo- jak też lewo-niezmiennicze.

Zadanie 5. Niech $G = \{(x \mapsto a\,x + b) : \ a > 0, b \in \mathbb{R}\}$ będzie grupą transformacji afinicznych prostej. Czy na G istnieje metryka prawo- oraz lewo- niezmiennicza?

Zadanie 6. Niech G będzie grupą Liego oraz niech g będzie metryką na G lewo- oraz prawo-niezmienniczą. Rozważamy koneksję Levi-Civity tej metryki.

a. Wykazać, że geodezyjne przechodzące przez element neutralny pokrywają się z 1-parametrowymi podgrupami G.

b. Niech X, Y, Z będą lewo-niezmienniczymi polami wektorowymi na G. Wykazać tożsamość $g([X,Y],Z) = g(X,[Y,Z])$.

c. Niech X, Y, Z będą jak poprzednio. Wykazać tożsamość $R(X,Y)Z = \frac{1}{4}[[X,Y],Z]$

Zadanie 7. Niech g będzie metryką na rozmaitości M taką, że krzywizna $R \equiv 0$. Czy operacja przesunięcia równoległego wzdłuż dowolnej krzywej zamkniętej jest identycznością? Czy odpowiedź ulegnie zmianie jeżeli założymy, że rozmaitość M jest jednospójna?

Zadanie 8. Niech dana będzie koneksja na wiązce $L \to M$. Definiuje ona odwzorowanie $D : \Gamma(L) \to \Gamma(L \otimes \Omega^1(M))$.

a. Pokazać, że D w naturalny sposób rozszerza się do odwzorowania $D : \Gamma(L \otimes \Omega^k(M)) \to \Gamma(L \otimes \Omega^{k+1}(M))$.

b. Wykazać tożsamość $D^2 s = R \wedge s$, gdzie $s \in \Gamma(L \otimes \Omega^k(M))$.