Zadania z form, seria 2
26 marca 2013

1. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą
   (a) $K = \{(x, y) : (x^2 + y^2)^2 \leq a(x^3 - 3xy^2)\}$,
   (b) $K = \{(x, y) = (\sin 2\varphi, \sin 3\varphi),\ \varphi \in [0, \pi]\}$,
   (c) $K = \{(x, y) : ax^3 - bx^2y + cy^4 \leq 0, \quad x, y \geq 0\}$, $(a, b, c > 0)$.

2. Niech S będzie powierzchnią zawartą w sferze $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $\omega_0 = \frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$. Wykazać, że przy odpowiednim wyborze orientacji na S wartość $\frac{1}{3}\int_S \omega_0$ jest objętością bryły $[0, 1]\, S = \{tp :\ t \in [0, 1],\ p \in S\}$.

3. Niech $\omega_0 = \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ oraz niech $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus 0)$, $\mathrm{d}\omega = 0$.
   (a) Wykazać, że $\int_{x^2+y^2=1} \omega = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy ω jest 1-formą zupełną.
   (b) Wywnioskować, że $\omega = a\omega_0 + \mathrm{d}f$, gdzie $a \in \mathbb{R}$, $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^2 \setminus 0)$.

4. Sformułować i wykazać rezultat analogiczny do zadania 3 w przypadku $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}e_z$.

5. Niech $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3 \setminus 0$ oraz $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3 \setminus 0)$, $\mathrm{d}\omega = 0$. Wykazać, że
   (a) Wykazać, że $\int_S \omega = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy ω jest 2-formą zupełną.
   (b) Wywnioskować, że $\omega = a\omega_0 + \mathrm{d}\alpha$, gdzie $a \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^3 \setminus 0)$, ω_0 jest formą z zadania 2

6. Niech $\omega = \frac{1}{\|x\|}(x_1\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \cdots \wedge drx_n + cycl) \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus 0)$. Wykazać, że
   (a) Forma $\alpha \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus 0)$ jest niezmiennicza względem grupy obrotów, t.j. transformacji $A \in End(\mathbb{R}^n) :\ A^*A = Id, \det A = 1$ wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha = f(\|x\|)\omega$.
   (b) Forma $\alpha = f(\|x\|)\omega$ jest dodatkowo niezmiennicza względem jednokładności $J_r(x) = r\,x$ $(r > 0)$ wtedy i tylko wtedy gdy forma α jest zamknięta.

7. Niech K będzie zwartym obszarem w $\mathbb{R}^n$ z gładkim brzegiem oraz niech u, v będą funkcjami gładkimi określonymi na otwartym otoczeniu K. Wykazać następujące tożsamości

   (a) $\int_K (u\Delta v + g(\nabla u, \nabla v))\mathrm{d}l_n = \int_{\partial K} u\nabla_{\overline{n}} v \mathrm{d}\sigma$, gdzie $\overline{n}$ jest wektorem normalnym do brzegu K, skierowanym "na zewnątrz" obszaru,

   (b) $\int_K (u\Delta v - v\Delta u)\mathrm{d}l_n = \int_{\partial K}(u\nabla_{\overline{n}} v - v\nabla_{\overline{n}} u \mathrm{d}\sigma$,

   (c) $\int_K \Delta u \mathrm{d}l_n = \int_{\partial K} \nabla_{\overline{n}} u \mathrm{d}\sigma$

8. Niech P^2 będzie zbiorem prostych w $\mathbb{R}^3$ przechodzących przez zero, tzn. $\mathrm{P}^2 = \{\mathbb{R}^3 \setminus 0\}/\sim$, gdzie $x \sim y$ wtedy i tylko wtedy gdy $y = \lambda x$, gdzie $\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0$.

   (a) Skonstruować zanurzenie P^2 w przestrzeń $\mathbb{R}^n$.

   (b) Pokazać, że P^2 ma strukturę zwartej, spójnej, 2-wymiarowej rozmaitości.

   (c) Pokazać, że P^2 nie jest orientowalna.

   (d) Pokazać, że na P^2 istnieją nieściągalne pętle, ale każda 1-forma zamknięta jest zupełna.

   (e) Pokazać, że każda 2-forma na P^2 jest zupełna.

9. Niech P^3 będzie zbiorem prostych w $\mathbb{R}^4$ przechodzących przez zero, tzn. $\mathrm{P}^3 = \{\mathbb{R}^4 \setminus 0\}/\sim$, gdzie $x \sim y$ wtedy i tylko wtedy gdy $y = \lambda x$, gdzie $\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0$.

   (a) Skonstruować zanurzenie P^3 w przestrzeń $\mathbb{R}^n$.

   (b) Pokazać, że P^3 ma strukturę zwartej, spójnej, 3-wymiarowej, orientowalnej rozmaitości.

   (c) Pokazać, że P^3 jest dyfeomorficzna z grupą obrotów przestrzeni 3-wymiarowej $A \in End(\mathbb{R}^3) : \ A^*A = Id, \det A = 1$.

   (d) Pokazać, że na P^3 istnieją nieściągalne pętle, ale każda 1-forma zamknięta jest zupełna.

   (e) Pokazać, że każda 2-forma zamknięta na P^3 jest zupełna.

   (f) Pokazać, że 3-forma ω na P^3 jest zupełna wtedy i tylko wtedy gdy $\int_{\mathrm{P}^3} \omega = 0$.

10. Wykazać, że obrazem sfery $S = \{(x, y, z) : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ przy odwzorowaniu $F(x, y, z) = (xy, xz, y^2 - z^2, 2yz)$ jest 2-wymiarowa rozmaitość M zanurzona w $\mathbb{R}^4$.

(a) Wykazać, że nie istnieją *dwie* funkcje $f_1, f_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ takie, że M jest zbiorem rozwiązań równań $f_1 = f_2 = 0$ oraz $rk(f_1', f_2') = 2$ w każdym punkcie M (to znaczy rozmaitości M nie można globalnie otrzymać z "TFU").

(b) Skonstruować funkcje $f_1, \ldots, f_k \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ takie, że M jest zbiorem rozwiązań równań $f_1 = \cdots = f_k = 0$ oraz $rk(f_1', \ldots, f_k') = 2$ w każdym punkcie M; zinterpretować wynik.

11. Niech $M \subset \mathbb{R}^N$ będzie rozmaitością wymiaru $n < N$. Wykazać, że istnieją funkcje $f_1, \ldots, f_k \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ takie, że M jest zbiorem rozwiązań równań $f_1 = \cdots = f_k = 0$ oraz $rk(f_1', \ldots, f_k') = N - n$ w każdym punkcie M ($k \geq N - n$).

12. Utożsamić torus $\mathrm{T} = S^1 \times S^1$ z przestrzenią ilorazową $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, gdzie relacja równoważności jest postaci $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ jeżeli $x_2 - x_1 \in \mathbb{Z}$ oraz $y_2 - y_1 \in \mathbb{Z}$.

    (a) Wykazać, że 1-formy $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ są dobrze określone na T, zamknięte, ale nie są zupełne.

    (b) Wykazać, że dla każdej 1-formy zamkniętej $\alpha \in \Omega^1(\mathrm{T})$ istnieją stałe a, b takie, że $\alpha - a\mathrm{d}x - b\mathrm{d}y$ jest formą zupełną.

    (c) Wykazać, że 2-forma $\omega \in \Omega^2(\mathrm{T})$ jest zupełna wtedy i tylko wtedy gdy $\int_{\mathrm{T}} \omega = 0$.

13. Znaleźć warunek na pierwiastki zespolonego wielomianu $P(z)$ gwarantujące, że zbiór podzbiór $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ zadany równaniem $w^n - P(z) = 0$ $(z, w \in \mathbb{C})$ jest 2-wymiarową gładką rozmaitością. Wykazać, że rozmaitość ta jest orientowalna.

14. Niech M będzie zwartą rozmaitością z brzegiem. Wykazać, że istnieje zanurzenie M w przestrzeń euklidesową $\mathbb{R}^N$ takie, że $M \subset \{x_N \leq 0\}$ oraz ∂M jest zawarty w hiperpowierzchni $x_N = 0$.

15. Niech M będzie zwartą rozmaitością z brzegiem $\partial M = N_1 \sqcup N_2$, gdzie N_j to spójne składowe ∂M oraz $N_1 \cap N_2 = \emptyset$. Wykazać, że istnieje zanurzenie M w $\mathbb{R}^n \times [0, 1]$ takie, że N_1 jest zawarte w $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ oraz N_2 jest zawarte w $\mathbb{R}^n \times \{1\}$.

16. Niech M będzie zwartą, gładką rozmaitością a f funkcją ciągłą na M. Pokazać, że f można przybliżać funkcjami gładkimi w topologii zbieżności jednostajnej wraz z pochodnymi do rzędu N.