Zadania z form

1. Znaleźć bazę $(e_1, \dots, e_n)$, w której następujące 2-formy mają postać kanoniczną

   (a) $\omega = \sum_{i<j} f_i \wedge f_j$,

   (b) $\omega = f_1 \wedge f_2 + 2f_2 \wedge f_3 + 3f_3 \wedge f_4 + 2f_4 \wedge f_5 + f_5 \wedge f_1$,

   (c) $\omega = \sum_{i=1}^{5} i f_i \wedge f_{i+1}$,

   (d) $\omega = \sum_{i<j} (j-i) f_i \wedge f_j$.

2. Wykazać, że forma $\omega \in \bigwedge^2(V^*)$ jest rozkładalna na iloczyn 1-form wtedy i tylko wtedy gdy $\omega \wedge \omega = 0$.

3. Niech $(e_1, \dots, e_5)$ będzie bazą przestrzeni V^*. Wykazać, że forma $\omega = \sum_{i<j<k} e_i \wedge e_j \wedge e_k$ jest rozkładalna, ale nie jest prosta.

4. Wyrazić we współrzędnych cylindrycznych (ρ, φ, z) i sferycznych (r, θ, φ) następujące formy różniczkowe

   (a) $x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$,

   (b) $\frac{xz\mathrm{d}x + yz\mathrm{d}y - \rho^2\mathrm{d}z}{\rho}$

   (c) $\frac{1}{r^3}(x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)$

5. Dla jakich funkcji gładkich $f \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ następująca forma $\omega = f(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t + \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x)$ jest zamknięta?

6. Niech $n \geq 5$ oraz $\omega = h \sum_{i<j<k} \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_j \mathrm{d}x_k \in \Omega^3(\mathbb{R}^n)$, gdzie $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Znaleźć warunek na funkcję h równoważny $\mathrm{d}\omega = 0$. Dla funkcji h spełniającej ten warunek, znaleźć 2-formę α taką, że $\mathrm{d}\alpha = \omega$.

7. Niech $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$. Wykazać, że istnieje $\alpha \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ taka, że forma $\omega - \mathrm{d}\alpha$ nie zawiera składników z czynnikiem $\mathrm{d}x_n$.

8. Sprawdzić warunek $\mathrm{d}\omega = 0$ oraz znaleźć funkcję f taką, że $\omega = \mathrm{d}f$ na zbiorze U w następujących przypadkach

   (a) $U = \{(x, y) : y > 0\}$, $\omega = \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2x^2 - xy + y^2}$,

   (b) $U = \{(x, y) : x > 0\}$, ω taka jak w poprzednim punkcie,

   (c) $U = \{(x, y, z) : x, y, z > 0\}$, $\omega = \frac{yz\mathrm{d}x - x\log x(z\mathrm{d}y + 2y\mathrm{d}z)}{xy^2z^3}$.

9. Sprawdzić warunek $\mathrm{d}\omega = 0$ oraz znaleźć formę α taką, że $\omega = \mathrm{d}f$ na zbiorze U w następujących przypadkach

   (a) $U = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 > 0\}$, $\omega = \frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$,

   (b) $U = \mathbb{R}^3 \setminus 0$, $\omega = \frac{1}{r}\Big((yf_z - zf_y)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (zf_x - xf_z)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (xf_y - yf_x)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\Big)$,

   (c) $U = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 > 0, z > 0\}$, $\omega = \frac{f(xz,yz)}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x - z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)$, gdzie $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

10. Niech $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^2 \setminus 0)$. Wykazać, że istnieje 1-forma $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus 0)$ taka, że $\omega = \mathrm{d}\alpha$.

11. Niech $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^n \setminus 0)$. Wykazać, że istnieje $\alpha \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^2 \setminus 0)$ taka, że $\omega = \mathrm{d}\alpha$.

12. Niech $U = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 > 0\}$ oraz $\omega = z\mathrm{d}z \wedge \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$. Wykazać, ze nie istnieje forma $\alpha \in \Omega^1(U)$ taka, że $\omega = \mathrm{d}z \wedge \alpha$ oraz $\mathrm{d}\alpha = 0$.

13. Wykazać, że dla dowolnej formy $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ spełniającej warunki $\mathrm{d}\omega = 0$, $\mathrm{d}z \wedge \omega = 0$ istnieje taka forma $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ taka, że $\omega = \mathrm{d}z \wedge \alpha$ oraz $\mathrm{d}\alpha = 0$.