Analiza I.2*

Zadania, 25 lutego 2012

- Wykazać następujące nierówności

  a) $\frac{1+x}{x}\arctan x \geq \frac{\pi}{2}$ dla $x>1$,

  b) $\frac{\log x}{x-1} > \frac{2}{x+1}$ dla $x>0$, $x\neq 1$,

  c) $\frac{x}{e^x-1} > \frac{2}{e^x+1}$,

  d) $\frac{1}{2}\log(x+\sqrt{1+x^2}) \leq \sqrt{1+x^2}-1$.

- Obliczyć $f^{(n)}(x)$ dla

  a) $\frac{x}{e^x}$,

  b) $\sin^2 x$,

  c) $e^x \sin 5x$.

- Niech P, Q będą wielomianami. Pokazać, że

$$P(\tfrac{d}{dx})\left(e^{kx}Q(x)\right)|_{x=0} = Q(\tfrac{d}{dx})\left(P(x)\right)|_{x=k}.$$

- Niech $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ oraz $\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+1} = 0$. Pokazać, że istnieje $x\in(0,1)$ takie, że $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$.

- Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełnia $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\big|f(x)-f(y)\big| \leq |x-y|^2$. Wykazać, że f jest funkcją stałą.

Zadanie 3.1 Niech $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną, której druga pochodna f'' jest ograniczona oraz taką, że istnieje skończona granica $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Pokazać, że $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.
Czy założenie ograniczoności drugiej pochodnej jest istotne?

Zadanie 3.2 Niech f będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną na $(-\varepsilon, T+\varepsilon$, gdzie $T,\varepsilon>0$ oraz taką, że $f'(0)=f'(T)=0$ oraz $f(T)-f(0)=L>0$. Pokazać, że istnieje $t_0\in(0,T)$ takie, że $|f''(t_0)|\geq \frac{4L}{T^2}$.

Zadanie 3.3 Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ oraz $M_k=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f^{(k)}(x)|$. Pokazać, że jeżeli $M_0, M_2<\infty$, to $M_1\leq\sqrt{2M_0M_2}$.

Zadanie 3.4 Niech $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, n-krotnie różniczkowalną na (a,b), która ma co najmniej $n+1$ zer na $[a,b]$. Niech P będzie wielomianem stopnia n, którego wszystkie pierwiastki są rzeczywiste. Pokazać, że funkcja $P(\frac{d}{dx})f$ zeruje się na (a,b).

Zadanie 3.5 Niech $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, dwukrotnie różniczkowalną na (a,b). Pokazać, że istnieje $c\in(a,b)$:

$$f(a)-2f(\tfrac{a+b}{2})+f(b)=(\tfrac{b-a}{2})^2f''(c).$$

Zadanie 3.6 Niech $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, dwukrotnie różniczkowalną na $(0,1)$, spełniającą: $f(0)=f(1)=0$, $\inf_{x\in[0,1]}f(x)=-1$. Pokazać, że istnieje $c\in(0,1)$ takie, że $f''(c)\geq 8$.

Zadanie 3.7 Niech $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Czy dla dowolnego $x\in(a,b)$ istnieją $x_1,x_2\in(a,b)$, $x_1\neq x_2$ takie, że

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(x)?$$

Czy odpowiedź zmieni się jeżeli założymy, że f jest dwukrotnie różniczkowalna na (a,b) oraz $f''\neq 0$ na (a,b)?

Zadanie 3.8 Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcja klasy C^2 taką, że $|f|\leq 1$, $(f(0))^2+(f'(0))^2=4$.
Wykazać, ze istnieje punkt $x_0\in\mathbb{R}$ taki, że $f(x_0)+f''(x_0)=0$.

Zadanie 3.9 Niech f będzie funkcją klasy $C^\infty((-\varepsilon,+\infty)$ (dla pewnego $\varepsilon>0$) taką, że $f(0)\,f'(0)\geq 0$ oraz $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$. Pokazać, że istnieje ściśle rosnący ciąg x_n taki, że $f^{(n)}(x_n)=0$.

Zadanie 3.10 Niech f będzie funkcją klasy C^{n+2} na otoczeniu $0\in\mathbb{R}$, taką że $f^{(n+2)}(0)\neq 0$. Niech $c_h\in(0,h)$ będzie punktem pośrednim w postaci Lagrange'a reszty we wzorze Taylora $r_n(h)=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c_h)$. Wykazać, że $\lim_{h\to 0}\frac{c_h}{h}=\frac{1}{n+2}$.
Policzyć tę granicę przy założeniu, że $f^{(n+j)}(0)=0$ dla $j=2,\ldots,k-1$ oraz $f^{(n+k)}(0)\neq 0$, gdzie $k\geq 3$ (zakładamy odpowiednio wyższą klasę gładkości funkcji f).

Zadanie 3.11* Niech f będzie funkcją klasy C^∞ na $\mathbb{R}$ taką, że dla każdego $x\in\mathbb{R}$ istnieje $n=n(x)$ takie, że $f^{(n)}(x)=0$. Pokazać, że f jest wielomianem.

Stare

Zadanie 1.1 Niech $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą oraz $0 < \alpha < \beta$ ustalonymi liczbami rzeczywistymi. Ponadto niech
$\forall_{a \in (\alpha,\beta)} \lim_{n\to\infty} f(na) = 0$. Wykazać, ze $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Zadanie 1.2 Niech $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją taką, że $f(a) < 0 < f(b)$ oraz istnieje funkcja rosnąca g taka, że $f + g$ jest funkcją ciągłą. Wykazać, że $\exists_{x\in[a,b]} f(x) = 0$.

Zadanie 1.3 Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją posiadającą własność Darboux oraz taką, że dla dowolnej liczby wymiernej $q \in \mathbb{Q}$ przeciwobraz $f^{-1}(q)$ jest zbiorem domkniętym. Pokazać, że funkcja f jest ciągła.