Analiza I.2*

Zadania, 14 maja 2012

- Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną całek

  a) $\int_0^\infty \sin(x^2)dx$,
  b) $\int_1^\infty e^{\sin x} \frac{\sin 2x}{x^\alpha} dx$,
  c) $\int_1^\infty \sin(\log^2 x)dx$,
  d) $\int_1^\infty (\log x)^\alpha \frac{\sin x}{x} dx$,
  e) $\int_0^\infty x \sin(e^x)dx$,
  f) $\int_0^\infty x \sin(x^3 - ax)dx$, $a > 0$.

- Obliczyć całki

  a) $\int_0^1 x^p |\log(1 - x^q)|dx$, $p, q > 0$,
  b) $\int_0^1 \log x \log(1 - x)dx$.

<u>Zadanie 6.1</u> Niech $f \in C([0, +\infty))$ będzie funkcją T-okresową a funkcja g niech będzie monotoniczna oraz taka, że $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

a) Jeżeli $\int_0^T f = 0$ to całka $\int_0^\infty f\, g$ jest zbieżna

b) Jeżeli $\int_0^T f \neq 0$ to całka $\int_0^\infty f\, g$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy gdy $\int_0^\infty g$ jest zbieżna

<u>Zadanie 6.2</u> Niech $f \in C([0, +\infty))$ będzie funkcją T-okresową. Wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(nx)dx = \frac{b-a}{T} \int_0^T f(x)dx.$$

<u>Zadanie 6.3</u> Obliczyć całkę $\int_0^\infty \frac{\arctan(\pi x) - \arctan x}{x} dx$

<u>Zadanie 6.4</u> Opisać zbiór

$$W = \{ \int_0^1 f(x)e^{i\pi x}dx : f \in C([0, 1]),\ |f(x)| \le 1\}$$

(funkcje o wartościach rzeczywistych!).

Zadanie 6.5 Obliczyć granicę

$$\lim_{t\to 0} \sqrt{t} \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+tx)}.$$

Zadanie 6.6 Obliczyć $I(a) = \int_0^{\pi/2} \log(a^2 - \sin^2 x)dx$ dla $a > 1$.

Zadanie 6.7 Obliczyć $I = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{1-x^2}}dx$.
Wskazówka: $\frac{\arctan x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}$

Zadanie 6.8 Obliczyć $I(a) = \int_0^\infty e^{a\cos x} \sin(a \sin x)\frac{dx}{x}$.

Zadanie 6.9 Obliczyć $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{\pi^2 - x^2}dx$.

Zadanie 6.10 Niech $f : [0, +\infty)$ będzie funkcją monotoniczną oraz $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Wykazać, że

$$\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{h\to 0} h \sum_{n=0}^\infty f(hn).$$

Uogólnić ten wynik na przypadek funkcji f określonej na $(0, +\infty)$ i całki niewłaściwej w zerze i w nieskończoności.

Zadanie 6.11 Niech $a > 1$ oraz $f(t) = \prod_{n=1}^\infty (1 + \frac{t}{n^a})$. Wykazać, że

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-1/a} \log f(t) = \frac{\pi}{\sin(\pi/a)}.$$

Wskazówka. Skorzystać z poprzedniego zadania. Dla $\alpha \in (0, 1)$ *zachodzi wzór:* $B(\alpha, 1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$.

Zadanie 6.12 Niech P, Q będą wialomianami takimi, że $\deg P \leq \deg Q + 2$ oraz Q nie ma rzeczywistych pierwiastków. Załóżmy, że wielomian Q ma tylko pojedyncze (zespolone) pierwiastki: $z_1, \ldots, z_n, \overline{z_1}, \ldots, \overline{z_n}$; można założyć, że $Im(z_j) > 0$. Wykazać zbieżność całki oraz wzór:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)}.$$

Spróbować uogólnić ten wzór na przypadek podwójnych (wielokrotnych) pierwiastków Q.

Zadanie 6.13 Wykazać, że:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{1}{\sin(\frac{2m+1}{2n}\pi)}, \qquad n, m \in \mathbb{N}, \quad m < n.$$

Korzystając z tego wzoru wykazać tożsamość $B(\alpha, 1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$ dla $\alpha \in (0,1)$.
Wskazówka: warto skorzystać z zadania 6.12

Zadanie 6.14 Wykazać, że:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m} - x^{2k}}{1+x^{2n}} dx = \frac{\pi}{n} \left(\operatorname{ctg}(\tfrac{2m+1}{2n}\pi) - \operatorname{ctg}(\tfrac{2k+1}{2n}\pi) \right), \qquad n, m, k \in \mathbb{N}, \quad m, k < n.$$

Korzystając z tego wzoru obliczyć całkę $\int_0^\infty \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{1-x}$ dla $a, b \in (0,1)$.
Wskazówka: warto skorzystać z zadania 6.12

Zadanie 6.15 Wykazać, że:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{x^2 + 2x\cos\alpha + 1} dx = \pi \frac{\sin((1-a)\alpha)}{\sin\alpha \sin(a\pi)}, \qquad a \in (0,1), \ \alpha \in (-\pi, \pi).$$

Wskazówka: postępować analogicznie jak w zadaniach 6.13, 6.14.

Zadanie 5.15 Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} (x^a - [x^a]) \sin x dx, \qquad a > 1.$$

Zadanie 5.19 Niech $a, b > 0$ oraz ciągi (a_n), (b_n) zdefiniowane są rekurencyjnie $a_0 = a$, $b_0 = b$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n, b_n}$, $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$. Niech g będzie wspólną granicą tych ciągów. Wykazać, że

$$\int_0^{\pi/2} (a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t)^{-1/2} dt = \frac{\pi}{2g}.$$