Analiza I.2*

Zadania, 2 kwietnia 2012

- Obliczyć całki

  a) $\int \frac{1}{x^2} \arcsin x dx$,

  b) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$,

  c) $\int \sin(\log x) dx$,

  d) $\int \sqrt{e^{2x} + 2e^x + 4} dx$,

  e) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+15}} dx$,

  f) $\int \frac{1}{\sqrt{4-2x-x^2}} dx$,

  g) $\int \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+5x-10}} dx$,

  h) $\int \frac{3x^3-5x^2+8x}{(x^2-2x+1)(x^2-1)} dx$

- Wyprowadzić wzór rekurencyjny wyrażający całkę I_{n+1} lub I_{n+2} przez I_n

  a) $I_n = \int \frac{1}{x(x^1+1)} dx$,

  b) $I_n = \int \frac{x^p}{\log^n x} dx$, gdzie $p \in \mathbb{R}$,

  c) $I_n = \int \cos^n x dx$,

  d) $I_n = \int \frac{1}{\sin^n x} dx$,

  e) $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

- Obliczyć całki

  a) $\int_0^1 \frac{\arctan(\sqrt{x})}{(1+x)\sqrt{x}} dx$,

  b) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\tan^p x} dx$, gdzie $p \in \mathbb{R}$,

  c) $\int_0^{\pi} \frac{1}{3+2\cos x} dx$,

  d) $\int_a^b (x-a)^n (b-x)^m dx$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$

- Obliczyć pochodną funkcji $f(x) = \int_{x^2}^{x^3} sin(t^2) dt$.

- Obliczyć granicę $\lim_{n\to\infty} n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$.

- Obliczyć granicę $\lim_{n\to\infty} n \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k/n}}{n+1/k}$.

- Niech f będzie funkcją ciągłą na prostej $\mathbb{R}$, taką, że $\int_x^{x+1} f(t)dt = 0$ dla każdego x. Pokazać, że f jest funkcją okresową.
- Niech $f \in C([0,+\infty)$ oraz $\lim_{x\to+\infty} f(x) = C \in \mathbb{R}$. Obliczyć granicę $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)dx$
- Wykazać zbieżność ciągu $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} - \frac{n^{1-s}}{1-s}$, gdzie $s \in (0,1)$.
- Obliczyć granicę ciągu
  a) $a_n = \sum_{k=n+1}^{3n} \frac{1}{k}$,
  b) $b_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(\frac{k}{n^2})$,
  c) $d_n = \frac{c_{n+1}}{c_n}$, gdzie $c_n = \int_0^n e^{t^2/n} dt$
  d)

<u>Zadanie 5.1</u> Niech f będzie funkcją zadaną na odcinku $[0,1]$ wzorem: $f(x) = 0$ dla x będącego liczbą niewymierną oraz $f(x) = \frac{1}{q}$, gdzie $x = \frac{p}{q}$ (postać nieskracalna). Zbadać całkowalność w sensie Riemanna funkcji f na odcinku $[0,1]$. Jeżeli f jest całkowalna, obliczyć całkę $\int_0^1 f(x)dx$.

<u>Zadanie 5.2</u> Niech $f \in C^n(\mathbb{R})$ oraz $f^{(n)}$ jest funkcją okresową. Pokazać, że istnieje wielomian P taki, że $f - P$ jest funkcją okresową.

<u>Zadanie 5.3</u> Niech φ będzie funkcją ciągłą na odcinku $[-1,1]$. Wykazać, że

$$\int_0^{\pi} x\varphi(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\sin x)dx.$$

Obliczyć $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$.

<u>Zadanie 5.4</u> Niech $f \in C([0,1])$ oraz $\forall_n \in \mathbb{N} \int_0^1 f(x)\, x^n dx = 0$. Pokazać, że $f \equiv 0$.

<u>Zadanie 5.5</u> Zdefiniujmy wielomiany $P_n = \frac{1}{2^n n!}((x^2-1)^n)^{(n)}$. Obliczyć $\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx$ dla dowolnych n, m.

<u>Zadanie 5.6</u> Obliczyć (nie korzystając ze wzoru Stirlinga) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

<u>Zadanie 5.7</u> Niech f będzie funkcją ograniczoną na $[0,1]$, ciągłą w każdym punkcie nienależącym do zbioru Cantora C. Wykazać, że f jest funkcją całkowalną w sensie Riemanna na $[0,1]$.

Zadanie 5.8 Niech f, g będą funkcjami całkowalnymi na $[a, b]$ oraz niech $p, q \in (1, +\infty)$ takie, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wykazać nierówność

$$\int_a^b |f\,g|dx \leq (\int_a^b |f|^p dx)^{1/p} (\int_a^b |g|^q dx)^{1/q}.$$

Zadanie 5.9 Niech f będzie funkcją całkowalną na $[a, b]$. Wykazać, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja ciągła (wielomian) f_ε taka, że $\int_a^b |f - f_\varepsilon| dx \leq \varepsilon$.

Zadanie 5.10 Niech f_n będzie ciągiem funkcji całkowalnych na $[a, b]$ takim, że $\forall_{x,n} : |f_n(x)| \leq M$. Niech $F_n(x) = \int_a^x f(t)dt$. Wykazać, że istnieje podciąg F_{n_k} zbieżny jednostajnie na $[a, b]$.

Zadanie 5.11 Niech $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, $\gamma(a) = \gamma(b)$ oraz $\forall_{t \in [a,b]} \gamma(t) \neq 0$. Definiujemy

$$I_\gamma : = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt.$$

a) Wykazać, że $I_\gamma \in \mathbb{Z}$,

b) jeżeli γ nie przecina ujemnej półosi rzeczywistej, to $I_\gamma = 0$,

c) jeżeli γ_1, γ_2 spełniają $\forall_{t \in [a,b]}\ |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < |\gamma_1(t)|$, to $I_{\gamma_1} = I_{\gamma_2}$,

d) wywnioskować Zasadnicze Twierdzenie Algebry

Zadanie 5.12 Niech $R([0, 1])$ będzie przestrzenią funkcji całkowlanych w sensie Riemanna na odcinku $[0, 1]$ podzielonych przez relację równoważności $\cong$ (ćwiczenia) taką, że funkcja $d(f, g) = \int_0^1 |f - g|$ jest dobrze zdefiniowaną metryką (odległością). Wykazać, że przestrzeń $R([0, 1])$ nie jest zupełna (czyli istnieją w niej ciągi Cauchy nieposiadające granicy w $R([0, 1])$).

Zadanie 5.13 Niech $d(x)$ oznacza odległość liczby x od zbioru liczb całkowitych. Obliczyć

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \int_1^n d(\tfrac{n}{x}) dx.$$

Zadanie 5.14 Wykazać, że

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \frac{1 - (1 - x/n)^n}{x} dx = \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx$$

Zadanie 5.15 Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}(x^a-[x^a])\sin x dx, \qquad a>1.$$

Zadanie 5.16 Obliczyć

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{(e^x+1)(x^2+1)}dx.$$

Wskazówka: $\frac{1}{e^x+1}+\frac{1}{e^{-x}+1}=1$.

Zadanie 5.17 Niech $f\in C([0,\pi])$. Wykazać, że istnieje przedział $[a,b]\subset[0,\pi]$, taki, że $\int_0^\pi f(x)\sin x dx=\int_a^b f(x)dx$.

Zadanie 5.18 Niech g będzie funkcją rosnącą na $[0,+\infty)$. Wykazać, że funkcja $f(x)=\int_0^x g(t)dt$ jest wypukła a funkcja $h(x)=\frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt$ jest rosnąca.

Zadanie 5.19 Niech $a,b>0$ oraz ciągi (a_n), (b_n) zdefiniowane są rekurencyjnie $a_0=a$, $b_0=b$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n,b_n}$, $b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$. Niech g będzie wspólną granicą tych ciągów. Wykazać, że

$$\int_0^{\pi/2}(a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t)^{-1/2}dt=\frac{\pi}{2g}.$$