Analiza I.2*

Zadania, 11 marca 2012

- Wykazać następujące nierówności

  a) $|\arctan x \frac{\pi}{4}| \leq \frac{\pi}{4} \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}$ dla $x > 0$,

  b) $(\sin x)^2 \leq \sin(x^2)$ dla $x \in (0, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$,

  c) $\cos x + \cos y \leq 1 + \cos xy$ dla $(x, y) : \ x^2 + y^2 \leq \pi$,

- Niech $f_n(x) = n \sin \frac{x}{n}$. Zbadać zbieżność punktową, jednostajną na prostej $\mathbb{R}$ oraz jednostajną na odcinku $[-R, R]$ dla $R > 0$ ciągu funkcyjnego f_n.

- Niech $f_n(x) = \frac{nx}{n+x^2}$. Zbadać zbieżność punktową, jednostajną na prostej $\mathbb{R}$ oraz jednostajną na odcinku $[-R, R]$ dla $R > 0$ ciągu funkcyjnego f_n.

- Zbadać ciągłość funkcji

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x + n^2 x^2}$$

- Wykazać, że szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} e^{-x}$ jest zbieżny punktowo na prostej $\mathbb{R}$. Czy szereg jest zbieżny jednostajnie na $[0, +\infty)$? Czy szereg jest zbieżny jednostajnie na $[0, R]$ dla $R > 0$?

- Czy poprawne jest następujące wyliczenie (pierwsza równość):

$$\lim_{x \to 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{(x + n - 1)^2 + n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + n} = 2?$$

- Wykazać, że wzór $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$ określa funkcję klasy C^∞ na prostej $\mathbb{R}$.

- Obliczyć $\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(-x)^{n-1}$.

- Obliczyć sumy następujących szeregów

  a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$,

  b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$.

- Wykazać, że

  a) $\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{x^n}{1+x^n}=\frac{1}{2}\log 2$,

  b) $\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{1-x^{2n}}=\frac{1}{2}\log 2$.

- Zbadać zbieżność punktową, jednostajną i niemal jednostajną* następujących ciągów i szeregów funkcyjnych

  a) $\sqrt[n]{1+x^n}$, $x>0$,

  b) $nxe^{-n^2x^2}$, $x\in\mathbb{R}$,

  c) $\log(e^x+\frac{1}{n})$, $x\in\mathbb{R}$,

  d) $\frac{nx}{1+n^2x^2}$, $x\in(0,1]$

  e) $n^\alpha xe^{-nx}$, $x\in[0,1]$ (w zależności od parametru $\alpha\in\mathbb{R}$),

  f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$,

  g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n}$, $x>2$,

  h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^2+n}$, $x\in\mathbb{R}$

  $*$: *zbieżność niemal jednostajna oznacza zbieżność jednostajną na każdym zwartym podzbiorze dziedziny*

Zadanie 4.1 Skonstruować ciąg funkcji $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zbieżny punktowo do funkcji $f_0\equiv 0$, który nie jest zbieżny jednostajnie na żadnym niepustym otwartym odcinku (a,b). Czy istnieje taki ciąg przy dodatkowym założeniu, że funkcje f_n są ciągłe?

Zadanie 4.2 Niech f będzie funkcją ciągłą na odcinku $[0,1]$ taką, że $f(0)=0$. Pokazać, że istnieje ciąg wielomianów $P_n=\sum_k a_{n,k}x^k$ zbieżny jednostajnie do funkcji f taki, że $\lim_{n\to\infty}a_{n,k}=0$ dla każdego k.

Zadanie 4.3 Niech f będzie funkcją ciągłą na odcinku $[0,1]$, $t_1'\ldots,t_m\notin[0,1]$ oraz $a_1,\ldots,a_m\in\mathbb{R}$. Pokazać, że istnieje ciąg wielomianów P_n zbieżny jednostajnie do funkcji f taki, że $P_n(t_j)=a_j$ dla $j=1,\ldots,m$.

Zadanie 4.4 Obliczyć granicę $\lim_{x\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.
Wsk. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\frac{1}{n^x}+\frac{1}{(n+1)^x})$

Zadanie 4.5 Pokazać, że wzór $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\log(1+n^2x^2)$ określa funkcję ciągłą na $\mathbb{R}$. Pokazać, że f jest różniczkowalna na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ale nie jest różniczkowalna w $x=0$.

Zadanie 4.6 Wykazać, że szereg $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-x}$ określa funkcję klasy C^∞ na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ spełniającą równanie $f(x) - f(x-1) = \frac{1}{1-x}$.

Zadanie 4.7 Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją spełniającą warunek (warunek Lipschitza)

$$\forall_{x,y} |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

dla pewnej stałej $L \in \mathbb{R}$. Pokazać, że dla każdego $R > 0$ istnieje ciąg wielomianów P_n zbieżny jednostajnie do funkcji f na odcinku $[-R, R]$ oraz taki, że $|P_n(x) - P_n(y)| \leq L|x - y|$ dla $x, y \in [-R, R]$ (z tą samą stałą L).

Zadanie 4.8 Niech f_n będzie ciągiem funkcji ciągłych na odcinku $[a, b]$ zbieżnym punktowo do funkcji f_0. Rozpatrzmy następujący warunek (C): dla dowolnego $\varepsilon > 0$ oraz dowolnego n_0 istnieje skończona rodzina przedziałów otwartych (a_i, b_i), $i = 1, \ldots, k$ takich, że $[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^{k} (a_i, b_i)$ (pokrycie $[a, b]$) oraz indeksy $n_1, \ldots, n_k$, $\forall_i n_i > n_0$, takie, że

$$|f_{n_i}(x) - f_0(x)| < \varepsilon \quad \text{dla } x \in (a_i, b_i) \cap [a, b].$$

Wykazać, że granica f_0 jest funkcją ciągłą wtedy i tylko wtedy gdy spełniony jest warunek (C).

Zadanie 4.9 Niech $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^p + x^2 n^q}$, gdzie $p, q \geq 0$ oraz $p > 1$ lub $q > 1$. Zbadać ciągłość funkcji f w zależności od parametrów p, q.

Zadanie 4.10 Rozwinąć w szereg Taylora wokół $x_0 = 0$ funkcję $\arcsin x$. Wykazać równość

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

Wsk. $\arcsin' x = \ldots$