# Analiza I.2*

## Kolokwium, 6 maja 2011

**UWAGA:** Każde zadanie oddajemy na oddzielnej kartce. Prosimy o czytelne pisanie rozwiązań – prace nieczytelne nie będą sprawdzane.
Należy rozwiązać zadania 1, 2 oraz **dwa** wybrane przez siebie ze zbioru zadań 3,4,5,6

Zadanie 1: Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2+x^4)+\sqrt{1+2x^2}\cos 2x - 1}{x^2\log(\cos x)}$$

Zadanie 2: Niech

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x} e^{-n^2 x}, \qquad x \in [0, +\infty).$$

a.) Pokazać, że $f$ jest funkcją ciągłą na półprostej $(0, +\infty)$.

b.) Pokazać, że $f$ jest funkcją klasy $C^1$ na półprostej $(0, +\infty)$.

c*.) Pokazać, że funkcja $f$ nie jest ciągła w $x = 0$.

Zadanie 3: Niech $g(t)$ będzie funkcją ciągłą na prostej $\mathbb{R}$. Wykazać, że istnieje funkcja $f$ różniczkowalna na $\mathbb{R}$ taka, że

$$f'(t) = g(t)\sin(\tfrac{1}{t}) \qquad \text{dla } t \neq 0.$$

Ile wynosi $f'(0)$?

Zadanie 4: Niech $f \in C([0, \pi])$ spełnia

$$\int_0^{\pi} f(t)\sin t \mathrm{d}t = 0 = \int_0^{\pi} f(t)\cos t \mathrm{d}t.$$

Pokazać, że funkcja $f$ ma co najmniej dwa różne miejsca zerowe.
*Wskazówka:* $\sin(x - x_0) = \sin x \cos x_0 - \cos x \sin x_0$.

Zadanie 5: Niech $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$ będzie ciągiem funkcji wypukłych zbieżnym punktowo do funkcji $f$. Wykazać, że $f$ jest funkcją wypukłą a zbieżność jest niemal jednostajna.

Zadanie 6: Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, dwukrotnie różniczkowalną na $(a, b)$ oraz taką, że $f(a) = f(b) = 0$. Pokazać, że dla każdego $x \in (a, b)$ istnieje $\xi_x \in (a, b)$ takie, że

$$f(x) = -\tfrac{1}{2}(x-a)(b-x)f''(\xi_x).$$