Analiza I.2*

Egzamin, 10 czerwca 2011

UWAGA: Każde zadanie oddajemy na oddzielnej kartce. Prosimy o czytelne pisanie rozwiązań – prace nieczytelne nie będą sprawdzane.
Zadania 1a, 1b są do wyboru. Należy rozwiązać jedno z nich

Zadanie 1a: Niech $f \in C^2([0,1])$, $C = \sup_{[0,1]} |f''|$ oraz $f(a) = f(b) = 0$. Pokazać, że

$$\int_0^1 |f(x)| \mathrm{d}x \leq \frac{1}{12} C.$$

Wskazówka: Wykazać, że $|f(x)| \leq \frac{C}{2} x(1-x)$.

Zadanie 1b: Niech $f \in C^2([0,1])$, $C = \sup_{[0,1]} |f''|$. Wykazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$\Big| \int_0^1 f(x) \mathrm{d}x - \tfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\tfrac{k}{n}) - \tfrac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} f'(\tfrac{k}{n}) \Big| \leq \frac{C}{6n^2}.$$

Zadanie 2: Niech f będzie funkcją ciągłą na $\mathbb{R}$ oraz taką, że

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g''(x) \mathrm{d}x \geq 0$$

dla dowolnej funkcji g nieujemnej, klasy C^2, o zwartym nośniku.

(a) Przy dodatkowym założeniu, że f jest klasy C^2, pokazać, że f jest funkcją wypukłą.

(b) Pokazać wypukłość f przy założeniu ciągłości f.

Przypomnienie: funkcja g ma zwarty nośnik jeżeli istnieje liczba $R > 0$ taka, że $g(x) = 0$ dla $|x| \geq R$.

Zadanie 3: Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{dla } x \in (0, \pi) \\ -\frac{\pi}{4} & \text{dla } x \in (-\pi, 0) \\ 0 & \text{dla } x \in \{-\pi, 0, \pi\}. \end{cases}$$

(a) Obliczyć współczynniki Fouriera funkcji f.

(b) Niech S_N oznacza N-tą sumę częściową szeregu Fouriera funkcji f. Pokazać, że

$$\lim_{N \to \infty} S_N(\tfrac{\pi}{N}) = \tfrac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$$

(c) Niech $g_+ \in C^1([0,\pi])$, $g_- \in C^1([-\pi,0])$ (na końcach przedziałów pochodne jednostronne) oraz

$$g(x) = \begin{cases} g_+(x) & \text{dla } x \in (0,\pi] \\ g_-(x) & \text{dla } x \in [-\pi,0) \\ \frac{1}{2}(g_+(0)+g_-(0)) & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Niech S_N będzie N-tą sumą częściową szeregu Fouriera funkcji g. Pokazać, że

$$\lim_{N\to\infty} S_N(\tfrac{\pi}{N}) = g(0) + \tfrac{a}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t,$$

gdzie $a = g_+(0) - g_-(0)$.

Wskazówka-przypomnienie: jeżeli funkcja jest ciągła, kawałkami klasy C^1, to szereg Fouriera jest zbieżny jednostajnie.

Zadanie 4: Oznaczmy

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t, \qquad x \geq 0.$$

(a) Pokazać, że F jest funkcją ciągłą na półprostej $[0,+\infty)$.

(b) Pokazać, że F jest funkcją klasy C^1 na $(0,+\infty)$.

(c) Pokazać, że pochodna prawostronna funkcji F w $x_0 = 0$ wynosi $-\infty$.

Zadanie 5: Niech f będzie funkcją klasy $C^1([0,\pi])$ taką, że

$$f(0) = f(\pi) = 0, \qquad \int_0^\pi f(x)\sin x \mathrm{d}x = 0.$$

Pokazać, że

$$\int_0^\pi f^2(x)\mathrm{d}x \leq \frac{1}{4}\int_0^\pi (f'(x))^2\mathrm{d}x.$$

Dla jakich f zachodzi równość?

Wskazówka: warto skorzystać z tożsamości Parsevala dla odpowiednio dobranej funkcji.