

Równania różniczkowe zwyczajne z laboratorium 2024/2025
Grupa ćwiczeniowa nr 4 – Zadania

1 Rozgrzewka

Zadanie 1.1 Rozwiązać równanie swobodnego spadku ciała z oporem powietrza, tzn.

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -mg - k\dot{x} \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = 0, \end{cases}$$

gdzie $m > 0$, $k \geq 0$, $x_0 \geq 0$. Przy ustalonym x_0 , dla każdego $k \geq 0$, oznaczmy rozwiązanie przez x_k . Czy przy $k \rightarrow 0^+$, x_k zbiega do x_0 niemal jednostajnie?

Zadanie 1.2 Dla $a, b, x_0 > 0$ rozwiązać równanie

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - bx) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Obliczyć $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$.

Zadanie 1.3 Sprowadzić równanie $\ddot{x} = 2x - \dot{x}$ do układu równań pierwszego rzędu. Znaleźć różne λ_1, λ_2 , że $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ jest rozwiązaniem równania dla dowolnych $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

2 Równania o zmiennych rozdzielonych

Zadanie 2.1 Znaleźć rozwiązania zagadnień:

a)

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{t-x} \\ x(\ln 2) = 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} t\dot{x} = 1 + x^2 \\ x(1) = 0 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} (t^2 - 1)\dot{x} + 2tx^2 = 0 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Wyznaczyć maksymalny przedział istnienia tych rozwiązań i granice jednostronne na krańcach tego przedziału.

Zadanie 2.2 Niech $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi oraz niech $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie takie, że $g(x_0) \neq 0$. Rozważmy zagadnienie

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x)h(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Wykazać, że w pewnym otoczeniu t_0 istnieje dokładnie jedno rozwiązanie powyższego zagadnienia. Wyprowadzić wzór na to rozwiązanie przy użyciu funkcji pierwotnych h oraz $1/g$.

Zadanie 2.3 Z lejka o kształcie stożka o kącie rozwarcia $\pi/3$ wylewa się woda z prędkością proporcjonalną do pierwiątka wysokości wody, a więc $v^2 = kh$, gdzie $k > 0$ jest stałą. Prędkość v mierzymy w objętości na jednostkę czasu. W chwili początkowej 0 napełniamy naczynie do wysokości $h_0 > 0$. Wyznaczyć wysokość wody w lejku w zależności od czasu oraz znaleźć czas w którym cała woda wyleje się z lejka.

Zadanie 2.4 Rozważamy zbiornik o objętości V , całkowicie wypełniony roztworem soli, z czego początkowo sól zajmuje Q_0 objętości. Do zbiornika dolewamy roztworu soli o stałym stężeniu ϱ , ze stałą prędkością u , mierzoną w objętości na jednostkę czasu. Jednocześnie roztwór wypływa dnem zbiornika, również z prędkością u . Zakładając, że proces mieszania się roztworów jest natychmiastowy, wyznaczyć objętość soli $Q(t)$ w zależności od czasu oraz obliczyć $\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t)$.

3 Równania jednorodne, równania w postaci różniczki zupełnej i równania liniowe

Zadanie 3.1 Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $\dot{y} = (2x + 2y + 1)^2$.

Zadanie 3.2 Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $\dot{y} = \exp(\frac{y}{x}) + \frac{y}{x}$.

Zadanie 3.3 Sprowadzić równanie $\dot{y} = f(\frac{y}{x})$ do równania o zmiennych rozdzielonych.

Zadanie 3.4 Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $\dot{y} = \frac{x-y}{x+y}$.

Zadanie 3.5 Wyznaczyć krzywe całkowe równania $x dx + y dy = 0$. Znaleźć krzywą przechodzącą przez punkt $(1, 1)$.

Zadanie 3.6 Wyznaczyć krzywe całkowe równania $(2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0$. Znaleźć krzywą przechodzącą przez punkt $(1, 1)$.

Zadanie 3.7 Wyznaczyć krzywe całkowe równania $(\frac{x}{y} + 1) dx + (\frac{x}{y} - 1) dy = 0$.

Zadanie 3.8 Wyznaczyć krzywe całkowe równania $(x^2 + y^2 - x)dx - y dy = 0$.

Zadanie 3.9 Mówimy, że $\mu(x, y)$ jest czynnikiem całkującym równania $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, gdy

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}.$$

Wykazać, że

a) Jeśli $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = f(x)$, to $\mu(x) = \exp(\int f(x))$ jest czynnikiem całkującym.

b) Jeśli $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = g(y)$, to $\mu(y) = \exp(\int g(y))$ jest czynnikiem całkującym.

Zadanie 3.10 Znaleźć krzywe całkowe równania $(4x^2 + 2y^2 + 2y)dx + (x + 2xy)dy = 0$.

Zadanie 3.11 Znaleźć krzywą całkową równania $\dot{y} = \frac{y-x^2}{x^2y^2+x}$ przechodzącą przez punkt $(1, 0)$.

Zadanie 3.12 Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $\dot{x} = -\frac{2x}{t} - 3$.

4 Różne typy równań skalarnych

Zadanie 4.1 Dla następujących zagadnień wyznaczyć najpierw rozwiązania ogólne, a następnie rozwiązania z warunkiem początkowym

a)

$$\begin{cases} xy' - y = x^2 \cos x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x(y' - y) = e^x \\ y(1) = e \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x \ln x} + \ln^2 x \\ y(e) = 1 \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} y' \cos x - y \sin x = 1 \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Zadanie 4.2 Wyprowadzić wzór na rozwiązanie ogólne równania postaci

$$\dot{x} = xa(t) + b(t),$$

gdzie $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ są funkcjami ciągłymi.

Zadanie 4.3 Wyznaczyć rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{1}{x-y^2} \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

Zadanie 4.4 Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $3\dot{x} = tx^4 - x$.

Zadanie 4.5 (Równanie Bernoulliego) Niech $n \neq 1$ oraz niech $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą ciągłe. Sprowadzić równanie

$$\dot{x} + a(t)x + b(t)x^n = 0$$

do równania liniowego.

Zadanie 4.6 Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $\dot{x} + 2x = x^2 e^t$.

Zadanie 4.7 Znaleźć rozwiązanie ogólne zagadnienia $\dot{x} = -\frac{4}{t^2} - \frac{x}{t} + x^2$.

Zadanie 4.8 (Równanie Riccatiego) Niech $a, b, c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą ciągłe. Dane jest równanie

$$\dot{x} + a(t)x + b(t)x^2 + c(t) = 0.$$

Założmy, że u jest rozwiązaniem tego równania. Udowodnić, że podstawienie $y = x - u$ sprowadza powyższe równanie do równania Bernoulliego.

Zadanie 4.9 Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $\dot{y} + y = e^{-x}y^2 + e^x$.

Zadanie 4.10 Rozwiązać równanie $y = x\dot{y} - (\dot{y})^2$.

Zadanie 4.11 (Równanie Clairauta) Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1 . Rozważmy równanie

$$x = t\dot{x} + f(\dot{x}).$$

Zróżniczkować powyższe równanie i opisać metodę jego rozwiązania.

5 Istnienie i jednoznaczność

Zadanie 5.1 Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą okresową o okresie równym T . Niech $a > 0$. Wykazać, że równanie $\dot{x} = ax + f(t)$ ma dokładnie jedno rozwiązanie okresowe o okresie T .

Zadanie 5.2 Niech $U = \{(t, x) : |t - t_1| < a, \|x - x_1\| < b\}$ dla pewnych $a, b > 0$ oraz niech $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie klasy C^1 . Wykazać, że dla dowolnego $(t_0, x_0) \in U$, zagadnienie

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie w pewnym otoczeniu t_0 .

Zadanie 5.3 Niech $U = \{(t, x) : |t - t_1| < a, \|x - x_1\| < b\}$ i niech $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie ciągłą, spełniającą lokalny warunek Lipschitza. Niech x_1, x_2 , o wykresach w U , będą rozwiązaniami $\dot{x} = f(t, x)$ z warunkami początkowymi $x_1(t_0) \neq x_2(t_0)$. Wykazać, że wykresy x_1 i x_2 nie przecinają się.

Zadanie 5.4 Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie lokalnie lipschitzowskie oraz spełnia $f(0) = f(1) = 0$. Niech $x_0 \in (0, 1)$. Wykazać, że rozwiązanie

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

jest ograniczone. Uzasadnić, że x jest określone na całym $\mathbb{R}$.

Zadanie 5.5 (Twierdzenie Picarda-Lindelöfa - wersja globalna) Niech funkcja ciągła $f : (a, b) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dla pewnej stałej $L > 0$ spełnia

$$\forall t \in (a, b) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \quad \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|.$$

Wykazać, że dla dowolnych $t_0 \in (a, b)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, zagadnienie

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie w przedziale (a, b) .

Zadanie 5.6 Niech $f : (a, b) \rightarrow (0, +\infty)$ będzie ciągłą. Wykazać, że równanie $\dot{x} = f(x)$ z warunkiem początkowym $x_0 \in (a, b)$, ma maksymalnie jedno rozwiązanie.

Zadanie 5.7 Rozważmy $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ciągłe i takie, że dla pewnego $c \in (a, b)$ mamy $f(c) = 0$ oraz $f(x) \neq 0$ dla $x \neq c$.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

musi być jednoznaczne? Zaproponować założenie na f , które gwarantuje jednoznaczność.

Zadanie 5.8 (Twierdzenie Osgooda) Naszkicować dowód twierdzenia Osgooda. Niech $f(t, x)$ będzie ciągłą w obszarze $U = \{(t, x) : |t - t_1| < a, |x - x_1| < b\}$, dla pewnych $a, b > 0$, t_1, x_1 . Niech dodatkowo $\varphi : (0, 2b] \rightarrow (0, \infty)$ będzie ciągłą oraz taka, że

$$\int_0^{2b} \frac{dy}{\varphi(y)} = +\infty.$$

Ponadto niech

$$\forall (t, x_1), (t, x_2) \in U \quad \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq \varphi(|x_1 - x_2|).$$

Wykazać, że dla dowolnego $(t_0, x_0) \in U$ zagadnienie

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ma co najwyżej jedno rozwiązanie.

Zadanie 5.9 Dane jest zagadnienie

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + t \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Wykazać, że maksymalnym przedziałem istnienia rozwiązania tego zagadnienia jest $[0, \omega)$, gdzie $\omega \in [\frac{\pi}{4}, 1]$.

Zadanie 5.10 Podać przykład $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że zagadnienie

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

nie ma rozwiązania dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$.

Zadanie 5.11 (Lemat Gronwalla) Niech $a, b, u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi oraz niech b będzie nieujemna. Niech dla każdego $t \in [0, T]$ spełniona będzie nierówność

$$u(t) \leq a(t) + \int_0^t b(s)u(s) ds.$$

Wykazać, że wówczas

$$u(t) \leq a(t) + \int_0^t a(s)b(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right) ds.$$

Zadanie 5.12 Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem zawierającym 0, zaś $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie otwarty. Niech $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie ciągła i Lipschitzowska ze stałą $L > 0$ ze względu na drugą współzrędną. Niech $x_1, x_2 : I \rightarrow U$ będą rozwiązaniami $\dot{x} = f(t, x)$. Wykazać, że

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq e^{|t|L} \|x_1(0) - x_2(0)\|$$

6 Schematy jednokrokowe

Zadanie 6.1 Przeanalizować otwarty schemat Eulera

$$x_{k+1} = x_k + hf_k$$

wykonaną na zagadnieniu

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Zadanie 6.2 Przeanalizować otwarty schemat Eulera

$$x_{k+1} = x_k + hf_k$$

wykonaną na zagadnieniu

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt[3]{x} \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Zadanie 6.3 Wyznaczyć schemat Taylora do rzędu 3 dla równania $\dot{x} = f(t, x)$.

Zadanie 6.4 Zbadać rzęd schematu Rungego-Kutty

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + h(b_1 K_1 + b_2 K_2) \\ K_1 &= f(t_k, x_k) \\ K_2 &= f(t_k + ch, x_k + ahK_1) \end{aligned}$$

w zależności od b_1, b_2, c, a .

Zadanie 6.5 Zbadać rzęd schematu

$$x_{k+1} = x_k + h(\beta_1 f_k + \beta_2 f_{k+1})$$

w zależności od β_1, β_2 .

Zadanie 6.6 Wykazać, że schemat

$$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{6}h(4f_k + 2f_{k+1} + h(f_{t,k} + f_k f_{x,k}))$$

jest rzędu 3.

Zadanie 6.7 Sprawdzić, że schemat Rungego-Kutty zadany tabelą

0	0	0
2/3	1/3	1/3
	1/4	3/4

ma rzęd co najmniej 3.

7 Schematy wielokrokowe liniowe

Zadanie 7.1 Dany jest wielokrokowy schemat liniowy postaci

$$\sum_{j=0}^q \alpha_j x_{n+j} = h \sum_{j=0}^q \beta_j f_{n+j}.$$

Udowodnić, że błąd obcięcia spełnia równość

$$T_h = \sum_{i=0}^k c_i h^i + O(h^{k+1}),$$

gdzie

$$c_p = \frac{1}{p!} \left(\sum_{j=0}^q j^p \alpha_j - p \sum_{j=0}^q j^{p-1} \beta_j \right).$$

Zadanie 7.2 Zbadać rząd i stabilność schematu *mid-point*

$$x_{k+2} = x_{k+1} + 2h f_{k+1}.$$

Zadanie 7.3 Zbadać rząd i stabilność schematu *Milne'a Simpsona*

$$x_{k+2} - x_k = \frac{h}{3} (f_{k+2} + 4f_{k+1} + f_k).$$

Zadanie 7.4 Zbadać rząd schematu w zależności od parametrów:

$$x_{k+3} + \alpha x_{k+2} - \alpha x_{k+1} - x_k = h\beta(f_{k+2} + f_{k+1}).$$

Dla parametrów dających maksymalny rząd zbadać stabilność schematu.

8 Równania z parametrem, równania różnicowe, proste równania liniowe

Zadanie 8.1 Wyznaczyć następujące pochodne względem parametrów:

a) $\frac{\partial x}{\partial \mu}|_{\mu=0}$, gdzie $\dot{x} = x + \mu(x^2 + t)$, $x(0) = 1$

b) $\frac{\partial x}{\partial \mu}|_{\mu=0}$, gdzie $\dot{x} = 4\mu t - x^2$, $x(1) = 1$

c) $\frac{\partial x}{\partial x_0}|_{x_0=0}$, gdzie $\dot{x} = x + x^2 + tx^4$, $x(0) = x_0$

d) $\frac{\partial x}{\partial \lambda}|_{\lambda=0}$, gdzie $\dot{x} = x^2 - \lambda^2 t^2$, $x(0) = \lambda$

Zadanie 8.2 Rozwiązać następujące równania różnicowe liniowe:

a) $x_{n+2} = x_{n+1} + 6x_n$

b) $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$

c) $x_{n+2} = -4x_n$

Zadanie 8.3 Rozwiązać równania liniowe jednorodne:

a) $\ddot{x} + 4x = 0$;

b) $x^{(3)} - 4x^{(2)} + 4x^{(1)} = 0$;

9 Równania liniowe

Zadanie 9.1 Rozwiązać równania liniowe niejednorodne:

a) $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = te^{5t}$;

b) $\ddot{x} + x = 4 \sin t$;

c) $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = \frac{e^t}{t}$.

Zadanie 9.2 Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$t^2(t+1)\ddot{x} - 2x = 0.$$

Wskazówka: Zauważyć, że $x_1(t) = 1 + \frac{1}{t}$ jest rozwiązaniem. Następnie podstawić $x(t) = u(t)x_1(t)$.

Zadanie 9.3 Rozwiązać równanie $\dot{x} = Ax$, gdzie

a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

d)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Zadanie 9.4 Rozwiązać równanie

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}.$$