

Rachunek prawdopodobieństwa II

V seria zadań – łańcuchy Markowa

1. Zmienne losowe $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ są niezależne oraz $\mathbb{P}(\varepsilon_k = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(\varepsilon_k = -1)$. Rozstrzygnąć, które z poniższych procesów są jednorodnymi łańcuchami Markowa. Dla tych, które są jednorodnymi łańcuchami Markowa, wyznaczyć macierz przejścia.

- (a) $X_0 = 0, X_n = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$ dla $n \geq 1$.
- (b) $Y_0 = 1, Y_n = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$ dla $n \geq 1$.
- (c) $Z_n = 2^{\varepsilon_n}$ dla $n \geq 1$.
- (d) $W_n = \varepsilon_n \varepsilon_{n+1}$ dla $n \geq 1$.
- (e) $V_n = \varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}$ dla $n \geq 1$.

2. Dane są dwa niezależne jednorodne łańcuchy Markowa $(X_n)_n$ i $(Y_n)_n$ z macierzami przejścia P i Q odpowiednio. Wykazać, że $(X_n, Y_n)_n$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa i wyznaczyć jego macierz przejścia.

3. Dany jest zbiór przeliczalny E , funkcja mierzalna $f: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ (zakładamy, że wszystkie podzbiory E są mierzalne), zmienna losowa Y_0 o wartościach w E oraz ciąg $X_0, X_1, \dots$ zmiennych iid, niezależny od Y_0 . Niech $Y_{n+1} = f(X_n, Y_n)$ dla $n = 0, 1, \dots$. Wykazać, że $(Y_n)_{n=0}^\infty$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa i wyznaczyć jego macierz przejścia.

4. Dany jest jednorodny łańcuch Markowa $(X_n)_n$ na przestrzeni stanów E oraz funkcja różnowartościowa $f: E \rightarrow F$. Wykazać, że $(f(X_n))_n$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa. Czy to samo musi być prawdą, gdy nie założymy, że f jest różnowartościowa?

5 (Zadanie ćwiczebne ze starego egzaminu). Dla ustalonej liczby $p \in (0, 1)$ rozpatrzmy łańcuch Markowa $(X_n)_{n \geq 0}$ o przestrzeni stanów $\mathbb{Z}$ i macierzy przejścia takiej, że $p_{0,1} = p_{0,-1} = \frac{1}{2}$ oraz $p_{k,k+1} = p_{-k,-k-1} = p$ i $p_{k,k-1} = p_{-k,-k+1} = 1 - p$ dla $k = 1, 2, \dots$. Niech $M_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{|X_n|}$ oraz $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$.

- (a) Wykazać, że ciąg $(M_n, \mathcal{F}_n)$ jest nadmartingale dla $p \geq \frac{1}{2}$ i podmartingale dla $p \leq \frac{1}{2}$.
- (b) Wykazać, że M_n jest zbieżny prawie na pewno dla $p > \frac{1}{2}$.

6. Wyznaczyć wszystkie stany nieistotne i wszystkie zamknięte zbiory stanów dla łańcuchów Markowa o macierzy przejścia:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5/8 & 1/8 & 1/4 & 0 \\ 1/8 & 1/4 & 3/8 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

7. Załóżmy, że $(X_n)_n$ jest łańcuchem Markowa o macierzy przejścia z poprzedniego zadania oraz że X_0 ma rozkład jednostajny na $\{1, 2, 3, 4\}$. Wyznaczyć rozkład X_1 i X_2 .

8. Załóżmy, że y jest stanem chwilowym. Wykazać, że dla każdego $x \in E$ zachodzi $\sum_{n=1}^\infty p_{xy}(n) < \infty$. W szczególności $p_{xy}(n) \rightarrow 0$ gdy $n \rightarrow \infty$.

9. Wykazać, że każdy skończony (jednorodny) łańcuch Markowa ma co najmniej jeden stan powracający.

10. Zmienne losowe $X_0, X_1, X_2, \dots$ są niezależne i mają rozkład geometryczny z parametrem $\frac{1}{2}$ ($X_j \geq 1$ p.n.) Niech $Y_0 = 1$ p.n. oraz

$$Y_{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } X_n = 1 \\ X_n Y_n & \text{jeśli } X_n \neq 1. \end{cases}$$

Wykazać, że $(Y_n)_{n \geq 0}$ jest nieprzywiedlnym (jednorodnym) łańcuchem Markowa. Czy ten łańcuch jest okresowy? Wykazać, że wszystkie stany są powracające.

11. Zbadać okresowość (jednorodnego) łańcucha Markowa o macierzy przejścia:

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (b) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

12. Jednorodny łańcuch Markowa o przestrzeni stanów $\{0, 1, 2, \dots\}$ ma macierz przejścia spełniającą $p_{0,1} = 1$ oraz $p_{n,n+1} = p$ i $p_{n,n-1} = 1 - p$ dla $n \geq 1$ (to jest błądzenie po $\mathbb{N}$ z odbiciem). Wyznaczyć, w zależności od parametru $p \in (0, 1)$, wszystkie rozkłady stacjonarne.

13 (Zadanie ćwiczebne ze starego egzaminu). Niech (X_n) oznacza błądzenie symetryczne po $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ z odbiciem, to znaczy łańcuch Markowa, którego macierz przejścia spełnia warunki $p_{0,1} = 1 = p_{4,3}$, $p_{k,k+1} = \frac{1}{2} = p_{k,k-1}$ dla $k = 1, 2, 3$.

(a) Wykazać, że ciąg $Y_n = X_{2n}$, $n = 0, 1, \dots$ jest łańcuchem Markowa i wyznaczyć jego macierz przejścia.

(b) Znaleźć wszystkie rozkłady stacjonarne dla (X_n) i (Y_n) (tzn. wszystkie rozkłady stacjonarne (X_n) oraz wszystkie rozkłady stacjonarne (Y_n)).

14. Naukowiec mający n parasoli wędruje między domem a biurem, zabierając ze sobą parasol (jeśli ma go pod ręką) wtedy, gdy pada (co dzieje się z prawdopodobieństwem p), lecz nie wtedy, gdy nie ma deszczu (co dzieje się z prawdopodobieństwem $1 - p$). Niech stanem łańcucha Markowa będzie liczba parasoli, jaką naukowiec ma pod ręką tuż przed wyjściem na zewnątrz. Skonstruować macierz przejścia i znaleźć rozkład stacjonarny. Znaleźć przybliżone prawdopodobieństwo zmoknięcia naukowca (tuż po wyjściu na zewnątrz z powodu braku parasola) w danym (odległym) dniu, a następnie wykazać, że 5 parasoli chroni przed takim zmoknięciem w 95% dni.

15 (Zadanie ćwiczebne ze starego egzaminu). Niech (X_n) będzie jedn. łańcuchem Markowa o przestrzeni stanów $E = \{1, 2, 3, 4, \}$ i macierzy przejścia

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Czy łańcuch (X_n) jest nieprzywiedlny? Czy jest okresowy?

(b) Czy (X_{2n}) jest jednorodnym łańcuchem Markowa? Jeśli tak, to ile wynosi jego macierz przejścia?

(c) Obliczyć granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_{2026n} = 3 | X_0 = 1)$.

16. W dwóch pudełkach znajduje się łącznie n tresowanych pcheł o różnych imionach. Co 10 sekund wybieramy losowo jedną z pcheł i wypowiadamy głośno jej imię. Pchła, usłyszawszy swoje imię, przeskakuje do drugiego pudełka. Znaleźć rozkład stacjonarny liczby pcheł w pierwszym pudełku.

17. Rzucamy kostką tak długo, aż pojawi się ciąg 16 lub 66. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że ciąg 16 pojawi się wcześniej niż ciąg 66?

18. Rzucamy monetą symetryczną tak długo, aż wyrzucimy serię 1000 orłów (pod rząd). Obliczyć wartość oczekiwaną liczby przeprowadzonych rzutów.

19. Niech (X_n) będzie jednorodnym łańcuchem Markowa na przestrzeni stanów $E = \{1, 2, 3, 4, \}$ i macierzy przejścia

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Jakie jest prawdopodobieństwo dojścia w dwóch krokach ze stanu 1 do 2?
- (b) Zakładając, że $X_0 = 1$ p.n., obliczyć prawdopodobieństwo tego, że X_n dojdzie do stanu 2 zanim dojdzie do stanu 4.
- (c) Zakładając, że $X_0 = 3$ obliczyć wartość oczekiwaną czasu dojścia do 2.
- (d) Czy łańcuch jest okresowy? Czy jest nieprzywiedlny?
- (e) Wyznaczyć rozkład stacjonarny.

20 (Zadanie ćwiczebne ze starego egzaminu). Po wierzchołkach czworościanu $ABCD$ porusza się pionek, w każdym ruchu z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$ przeskakując do jednego z sąsiadów (chodzi o to, że dla każdego z sąsiadów pionek w kolejnym ruchu ruszy się do tego sąsiada z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$). W chwili 0 pionek znajduje się w wierzchołku A . Obliczyć

- (a) prawdopodobieństwo tego, że pionek wróci do A przed dotarciem do D ;
- (b) średni czas oczekiwania na powrót pionka do punktu A ;
- (c) przybliżone prawdopodobieństwo tego, że po 1000 krokach pionek będzie w punkcie A .

21 (Zadanie ćwiczebne ze starego egzaminu). Rzucamy kostką dopóki nie wyrzucimy 3 piątek pod rząd.

- (a) Znaleźć wartość oczekiwaną liczby wykonanych rzutów.
- (b) Znaleźć wartość oczekiwaną sumy wyrzuconych oczek.

22 (Zadanie ćwiczebne ze starego egzaminu). Rzucamy symetryczną monetą dopóki nie wypadną 3 orły pod rząd lub 4 reszki pod rząd.

- (a) Jakie jest prawd. tego, że gra zakończy się wypadnięciem 3 orłów pod rząd?
- (b) Ile wynosi wartość oczekiwana liczby wykonanych rzutów?