

Rachunek prawdopodobieństwa II

IV seria zadań – martyngały

1. Zmienne losowe τ i σ są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$. Czy momentami zatrzymania muszą być: $\sigma \wedge \tau$, $\sigma \vee \tau$, $\sigma + \tau$, $\tau + 1$, 2τ . Załóżmy, że $\tau \geq 1$ p.n. Czy $\tau - 1$ musi być momentem zatrzymania? Załóżmy, że τ jest parzysty p.n. Czy $\tau/2$ musi być momentem zatrzymania?

2. Wykazać, że moment k -tego dojścia do zbioru borelowskiego B jest momentem zatrzymania względem naturalnej filtracji.

3. Zmienne losowe τ i σ są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$. Wykazać, że $\{\tau < \sigma\}, \{\sigma < \tau\}, \{\tau = \sigma\}, \{\sigma = \tau\}, \{\tau \leq \sigma\}, \{\sigma \geq \tau\} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$ oraz że $\mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma = \mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma}$

4 (Zadanie ćwiczebne ze starego kolokwium). Zmienne σ oraz τ są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$. Które ze zmiennych: $\sigma + 2, \sigma - 2, \sigma^2, \sigma + \tau$ muszą być momentami zatrzymania względem tej samej filtracji?

5 (Zadanie ćwiczebne ze starego kolokwium). Niech $X_1, X_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Cauchy'ego z parametrem 1 oraz niech $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$. Które z następujących zmiennych losowych są momentami zatrzymania względem $(\mathcal{F}_n)_n$:

- (a) $\sigma_1 = \inf\{n: X_n \geq n\}$;
- (b) $\sigma_2 = \inf\{n \geq 2: X_n \geq X_{n-1}\}$;
- (c) $\sigma_3 = \inf\{n: X_{n+1} \geq X_n\}$?

6. Dany jest ciąg $X_1, X_2, \dots$ niezależnych zmiennych losowych o skończonej wariancji i średniej 0. Niech $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Wykazać, że S_n i $M_n = S_n^2 - \text{Var } S_n$ są martyngalami względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_n$ generowanej przez ciąg $(X_n)_n$.

7. Załóżmy, że zmienne $X_1, X_2, \dots$ z poprzedniego zadania mają ten sam rozkład zadany przez $\mathbb{P}(X_j = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X_j = -1)$. Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste a , dla których ciąg $(a^n \cos S_n, \mathcal{F}_n)_n$ jest martyngałem.

Wykazać też, że dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ ciąg $(\exp(\lambda S_n - n\lambda^2/2), \mathcal{F}_n)_n$ jest nadmartyngałem.

8. Dany jest ciąg $X_1, X_2, \dots$ niezależnych zmiennych losowych o średniej 1. Niech $M_n = X_1 \cdots X_n$. Wykazać, że M_n jest martyngałem względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_n$ generowanej przez ciąg $(X_n)_n$.

9 (Zadanie ćwiczebne (ze starego kolokwium?)). Niech $X_0, X_1, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie i średniej 0. Wykazać, że ciąg $(Z_n)_n$ dany wzorem

$$Z_0 = 0, \quad Z_n = X_0 X_1 + X_1 X_2 + \dots + X_{n-1} X_n \quad \text{dla } n \geq 1$$

jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$.

10 (Zadanie ćwiczebne ze starego kolokwium). Zmienne $X_1, X_2, \dots$ są niezależne i mają rozkład Poissona z parametrem 3. Niech $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$. Wyznaczyć wszystkie ciągi $(a_n)_n$ takie, że $(e^{2S_n + a_n}, \mathcal{F}_n)_n$ jest martyngałem.

11 (Zadanie domowe na – modyfikacja zadania ze starego kolokwium). Dana jest liczba rzeczywista t oraz ciąg $G_1, G_2, \dots$ niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$. Niech $S_n = G_1 + \dots + G_n$ i $\mathcal{F}_n = \sigma(G_1, \dots, G_n)$. Wyznaczyć wszystkie deterministyczne ciągi $(a_n)_n$, dla których $(e^{tS_n - a_n}, \mathcal{F}_n)_n$ jest martyngałem.

12 (Zadanie ćwiczebne ze starego kolokwium). Załóżmy, że $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ dla $n = 1, 2, \dots$, gdzie $X_1, X_2, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $[-2, 2]$.

- (a) Znaleźć wszystkie deterministyczne ciągi $(a_n)_n$ takie, że $(S_n^3 + a_n S_n, \mathcal{F}_n)_n$ jest martyngałem.
- (b) Niech $\tau = \inf\{n: S_n \geq \sqrt{n+3}\}$. Czy τ jest momentem zatrzymania względem $(\mathcal{F}_n)_n$?
- (c) Niech $\sigma = \inf\{n: S_n \geq (n+3)^2\}$. Czy σ jest momentem zatrzymania względem $(\mathcal{F}_n)_n$?

13 (Zadanie domowe na – zadanie ćwiczebne ze starego kolokwium). Niech $X_0, X_1, \dots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie o funkcji charakterystycznej φ spełniającej $\varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) = -3$. Niech ponadto $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$ dla $n = 1, 2, \dots$.

- (a) Wykazać, że ciąg $M_n = \sum_{i=1}^n X_{i-1} X_i$, $n \geq 1$, jest martyngałem względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$.
- (b) Znaleźć taką liczbę α , by ciąg $N_n = M_n^2 - \alpha \sum_{i=1}^{n-1} X_i^2$, $n \geq 1$ był martyngałem względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$.

14. Dany jest ciąg całkowalnych zmiennych losowych $(X_n)_n$ adaptowany do filtracji $(\mathcal{F}_n)_n$. Wykazać, że $(X_n, \mathcal{F}_n)_n$ jest martyngałem wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego ograniczonego momentu zatrzymania τ zachodzi $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0$.

Zadania o ruinie gracza

W poniższych zadaniach 15-18 gracze A i B dysponują kapitałami $a \in \{1, 2, \dots\}$ oraz $b \in \{1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ odpowiednio. Stawka w pojedynczej turze wynosi 1 i gra trwa aż do ruiny (bankructwa) jednego z graczy. Prawdopodobieństwo wygranej gracza A w pojedynczej turze wynosi p , a wygranej gracza B w pojedynczej turze wynosi $q = 1 - p$. Zakładamy, że wyniki kolejnych partii są niezależne.

15. Obliczyć prawdopodobieństwo ruiny gracza A, jeśli:

- (a) gra jest sprawiedliwa, tj. $p = \frac{1}{2}$;
- (b) gra jest niesprawiedliwa, tj. $p \neq \frac{1}{2}$.

16. Obliczyć średni czas oczekiwania na ruinę któregoś z graczy, jeśli:

- (a) gra jest sprawiedliwa, tj. $p = \frac{1}{2}$;
- (b) gra jest niesprawiedliwa, tj. $p \neq \frac{1}{2}$.

17. Załóżmy, że gracz B dysponuje nieograniczonym kapitałem, tj. „ $b = \infty$ ”. Obliczyć prawdopodobieństwo ruiny gracza A, jeśli:

- (a) gra jest sprawiedliwa, tj. $p = \frac{1}{2}$
- (b) gra jest niesprawiedliwa na niekorzyść gracza A, tj. $p < \frac{1}{2}$;
- (c) gra jest niesprawiedliwa na niekorzyść gracza B, tj. $p > \frac{1}{2}$.

18. Załóżmy, że gracz B dysponuje nieograniczonym kapitałem oraz gra jest niesprawiedliwa na niekorzyść gracza A. Obliczyć średni czas oczekiwania na ruinę gracza A.

19. Załóżmy, że $k \in \{1, 2, \dots\}$ i $S_n = X_1 + \dots + X_n$, gdzie $X_1, X_2, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie symetrycznym o wartościach ± 1 . Niech $\tau = \inf\{n: S_n = k\}$. Wykazać, że $\mathbb{E}\tau = \infty$.

20 (Zadanie domowe na – zadanie ćwiczebne ze starego egzaminu). Niech $X_1, X_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, takimi że $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 1/4$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1/2$. Zdefiniujmy ciąg zmiennych losowych

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + \dots + X_n \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Niech $\tau = \inf\{n \geq 0: S_n \in \{-10, 5\}\}$. Wyznaczyć $\mathbb{E}\tau$.

21 (Zadanie domowe warte 1,5 punktu, na – zadanie ćwiczebne ze starego egzaminu). Niech $X_1, X_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, takimi że $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2$. Zdefiniujmy ciąg zmiennych losowych

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + \dots + X_n \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Niech ponadto dla $n \geq 0$, $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, \dots, S_n)$.

- (a) Wyznaczyć wszystkie liczby $b, c \in \mathbb{R}$, takie że ciąg $M_n = S_n^4 - 6nS_n^2 + bn^2 + cn$, $n \geq 0$ jest martyngałem względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$.
- (b) Dla danej liczby całkowitej dodatniej a , niech $\tau = \inf\{n \geq 0: |S_n| = a\}$. Wyznaczyć średnią i wariancję τ .

22 (Zadanie ćwiczebne ze starego egzaminu). Zmienne $X_1, X_2, \dots$ są niezależne oraz $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{2}{5}$, $\mathbb{P}(X_i = 0) = \frac{1}{5}$. Określmy

$$S_0 = 4, \quad S_n = 4 + \sum_{k=1}^n X_k, \quad n = 1, 2, \dots$$

oraz

$$\tau = \inf\{n \geq 0: |S_n| = 15\}.$$

- (a) Znaleźć a takie, że zmienne $M_n = e^{3S_n - an} + e^{-3S_n - an}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ tworzą martyngał względem filtracji generowanej przez ciąg $(X_n)_{n \geq 1}$ (przyjmujemy, że $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$).
- (b) Wykazać, że $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$.
- (c) Obliczyć $\mathbb{E}e^{-a\tau}$, gdzie a jest liczbą z punktu (a).

23. Wykazać, że jeśli ciągi zmiennych losowych $(X_n)_n$ i $(Y_n)_n$ są jednostajnie całkowalne, to dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ ciąg $(aX_n + bY_n)_n$ jest jednostajnie całkowalny.

24. Załóżmy, że funkcja $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ spełnia warunek $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty$. Wykazać, że jeśli $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}\varphi(|X_n|) < \infty$, to ciąg $(X_n)_n$ jest jednostajnie całkowalny.

25. Podać przykład takiego jednostajnie całkowalnego ciągu zmiennych losowych $(X_n)_n$, że $\mathbb{E} \sup_{n \in \mathbb{N}} |X_n| = \infty$.

26. Dany jest ciąg $X_1, X_2, \dots$ niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie zadanym przez $\mathbb{P}(X_j = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X_j = -1)$. Wykazać, że nadmartyngał $Z_n = e^{a(X_1 + \dots + X_n) - na^2/2}$ jest zbieżny prawie na pewno. Czy jest zbieżny w L_1 ?

27. Załóżmy, że $X_1, X_2, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na odcinku $(0, 2)$. Wykazać, że $M_n = \prod_{k=1}^n X_k$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez $X_1, X_2, \dots$. Wykazać, że $(M_n)_n$ jest zbieżny prawie na pewno, ale nie w L_1 .

28. Podać przykład martyngału $(X_n, \mathcal{F}_n)_n$ takiego, że $X_n \rightarrow 0$ p.n. oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}|X_n| = \infty$.

Uwaga: proszę pamiętać, że jeśli $(X_n, \mathcal{F}_n)_n$ jest martyngałem, to $\mathbb{E}|X_n| < \infty$ dla każdego n .

29. Załóżmy, że $X_1, X_2, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi przy czym X_n ma rozkład Poissona z parametrem n^2 . Wykazać, że ciąg $M_n = \frac{1}{(n!)^2} \prod_{k=1}^n X_k$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez $X_1, X_2, \dots$. Czy $(M_n)_n$ jest zbieżny prawie na pewno? Czy jest zbieżny w L_2 ? A w L_1 ?

30. Załóżmy, że $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$, gdzie $X_1, X_2, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie o skończonej wariancji. Wykazać, że dla dowolnego całkowitego momentu zatrzymania τ względem filtracji generowanej przez ciąg $(X_n)_n$ zachodzi $\mathbb{E}(S_\tau - \tau \mathbb{E}X_1)^2 = \text{Var } X_1 \mathbb{E}\tau$.

31 (Zadanie ćwiczebne ze starego egzaminu). Ciąg $(M_n, \mathcal{F}_n)_n$ jest podmartyngałem takim, że $\mathbb{E} \sup_n |M_n| < \infty$. Czy z tego wynika, że

- (a) $(M_n)_n$ jest zbieżny p.n.?
- (b) $(M_n)_n$ jest zbieżny w L^1 ?
- (c) $(M_n)_n$ jest zbieżny w L^2 ?

32 (Zadanie ćwiczebne ze starego egzaminu). Zmienne $X_1, X_2, \dots$ są niezależne, symetryczne i mają wariancję 2. Określmy $M_n = \prod_{i=1}^n (1 + \frac{X_i}{i})$.

- (a) Znaleźć filtrację, względem której $(M_n)_n$ jest martyngałem. *Uwaga: chodzi o nietrywialną filtrację.*
- (b) Czy z założeń wynika zbieżność M_n w L^2 ?
- (c) Czy z założeń wynika zbieżność M_n prawie na pewno?

33 (Zadanie ćwiczebne ze starego egzaminu). Zmienne $X_1, X_2, \dots$ są niezależne i mają rozkład wykładniczy ze średnią 3.

- (a) Znaleźć liczby a_n takie, że zmienne dane wzorem

$$M_0 = 1, \quad M_n = \prod_{k=1}^n \left(a_k + \frac{X_k}{k^2} \right)$$

tworzą martyngał względem filtracji generowanej przez ciąg (X_n) .

- (b) Czy ten martyngał jest zbieżny prawie na pewno?
- (c) Czy ciąg $(M_n^2)_n$ jest jednostajnie całkowalny?