

Rachunek prawdopodobieństwa II

III seria zadań – centralne twierdzenie graniczne

1 (Zadanie powtórzeniowe z RP 1). Rzucono 10000 razy kostką. Podać przybliżone prawdopodobieństwo tego, że suma wyrzuconych oczek będzie zawarta między 34100 a 35900.

2. W banku pojawia się 100 klientów dziennie, a każdy z nich dokonuje wpłaty X_i (lub wypłaty, gdy X_i jest ujemne), gdzie $X_1, \dots, X_{100}$ są zmiennymi iid o średniej 0 i wariancji 100^2 . Ile gotówki należy mieć w kasie rano, by na koniec dnia z prawdopodobieństwem $0,99 \approx \Phi(2,33)$ nie zabrakło pieniędzy? Naczelnik banku w trakcie dnia uzupełnia braki z własnego nieskończonego zasobnego portfela, ale wieczorem chce odzyskać swoje pieniądze.

Jak zmieni się odpowiedź, gdy rozpatrzymy 100 filii tego samego banku, pracujących na tych samych zasadach i mogących wymieniać się między sobą gotówką na koniec dnia, aby wyrównać ewentualne braki w niektórych filiach?

3 (Zadanie ćwiczebne ze starego kolokwium). W czasie szczytu liczba rozmów łączona przez pewną centralę w ciągu godziny ma rozkład Poissona ze średnią 100. Zakładając niezależność liczby rozmów w różnych godzinach oszacuj prawdopodobieństwo, że centrala połączy w ciągu 400 kolejnych godzin szczytu między 40 a 42 tysiące rozmów.

4 (Zadanie ćwiczebne ze starego kolokwium). Czas obsługi pojedynczego klienta w kasie ma rozkład wykładniczy ze średnią 4 minuty. Zakładając, że klienci są obsługiwani w sposób niezależny, oszacować prawdopodobieństwo tego, że w ciągu 6 godzin uda się obsłużyć w kasie co najmniej 100 klientów.

5 (Lekko zmodyfikowane zadanie ćwiczebne ze starego kolokwium). Pani Anna przyjeżdża do pracy tramwajem, a pan Józef – samochodem. Czas dojazdu tramwajem jest zmienną losową o średniej 25 minut i odchyleniu standardowym 5 minut, a samochodem – o średniej 35 minut i odchyleniu standardowym 12 minut. Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że pani Anna w ciągu kolejnych 100 dni roboczych będzie dojeżdżała do pracy o 20 godzin krócej niż pan Józef. *Uwaga:* $\Phi(8/13) \approx 0.73$.

6 (Zadanie ćwiczebne ze starego egzaminu). W pewnym sklepie są cztery kasy – trzy zwykłe i jedna ekspresowa (dla klientów kupujących co najwyżej 10 artykułów). Średni czas obsługi w zwykłej kasie to 120 sekund, a w kasie ekspresowej 60 sekund, zaś odchylenie standardowe wynosi odpowiednio 60 i 30 sekund. Zakładamy, że do każdej kasy zawsze ktoś czeka w kolejce, a kasy obsługują klientów bez przerw. Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że

- (a) w ciągu godziny każda z kas zwykłych obsłuży przynajmniej 30 klientów, a kasa ekspresowa 60;
- (b) czas obsługi 40 klientów w kasie ekspresowej będzie o więcej niż 5 minut dłuższy niż 20 klientów w pierwszej z kas zwykłych.

7. Dany jest ciąg zmiennych iid $(X_n)_n$ o średniej 0 i skończonej wariancji $\sigma^2 \neq 0$. Zbadać zbieżność według rozkładu ciągów zmiennych losowych

$$(a) \frac{\sqrt{n}(X_1 + \dots + X_n)}{X_1^2 + \dots + X_n^2}, \quad (b) \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{X_1^2 + \dots + X_n^2}}.$$

8. Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ są niezależne i mają ten sam rozkład $\frac{1}{2}\delta_a + \frac{1}{2}\delta_{1/a}$ dla pewnego $a > 0$. Wykazać, że zmienne losowe $Y_n = (X_1 X_2 \dots X_n)^{1/\sqrt{n}}$ są zbieżne według rozkładu i znaleźć rozkład zmiennej granicznej.

9. (a) Zmienne losowe X_λ mają rozkład Poissona z parametrem λ . Wykazać, że

$$\frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{gdy } \lambda \rightarrow \infty.$$

(b) Wykazać, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

10 (Zadanie ćwiczebne ze starego kolokwium). Zmienna X_n ma rozkład Poissona z parametrem $5n$. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste α , dla których ciąg zmiennych losowych

$$Y_n := n^\alpha (X_n - 5n)$$

jest ciasny.

11 (Zadanie ćwiczebne ze starego kolokwium). Zmienne X_i są niezależne i mają rozkład Poissona z parametrem 2. Czy ciąg $\frac{(X_1 + \dots + X_n)^2 - 4n^2}{n\sqrt{n}}$ jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

12 (Zadanie ćwiczebne ze starego kolokwium). Zmienna S_n ma rozkład Poissona z parametrem $3n$. Czy ciągi $\frac{S_n}{n}$, $\frac{S_n - 3n}{\sqrt{n}}$ oraz $\sqrt{S_n} - \sqrt{3n}$ są zbieżne według rozkładu? W przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznaczyć odpowiednie granice.

13 (Zadanie domowe na XI). Dane są niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ o takim samym rozkładzie z wartością oczekiwaną równą 0 i skończoną wariancją $\sigma^2 > 0$. Wyznaczyć – w zależności od parametrów $t, \sigma > 0$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ – granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n^\alpha}\right| > t\right).$$

14 (Było na wykładzie). Wykazać, że jeśli niezależne zmienne $X_1, X_2, \dots$ mają ten sam rozkład o średniej 0 i wariancji 1, to układ trójkątny $X_{n,k} = \frac{X_k}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$ spełnia warunek Lindeberga.

15. Ustalmy $M > 0$. Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ są niezależne, mają średnią 0 i p.n. wszystkie przyjmują wartości w przedziale $[-M, M]$. Załóżmy, że ciąg

$$\sigma_n := \sqrt{\sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k)}$$

jest rozbieżny do nieskończoności. Wykazać, że ciąg $(X_1 + \dots + X_n)/\sigma_n$ zbiega według rozkładu do $\mathcal{N}(0, 1)$.

16 (Warunek Lapunowa). Niech $\sigma_n = \text{Var}(\sum_{k=1}^{n_k} X_k)$. Wykazać, że jeśli schemat serii $(X_{n,k})_{n \in \mathbb{N}, k \leq k_n}$ spełnia dla pewnego $p > 2$ warunek

$$\frac{1}{\sigma_n^p} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbb{E}|X_{n,k} - \mathbb{E}X_{n,k}|^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

to spełnia też warunek Lindeberga.

17. Dane są $p > 2$ oraz ciąg niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \dots$ o rozkładach ze średnią 0 i wariancją 1. Wykazać, że jeśli $\sup_n \mathbb{E}|X_n|^p < \infty$, to

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1).$$

18. Dane są niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ o tym samym rozkładzie symetrycznym wykładniczym z parametrem 1. Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu

$$Y_n = \frac{X_1 + 2X_2 + \dots + nX_n}{n^{3/2}}.$$

19. Dane są niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ o tym samym rozkładzie jednostajnym na odcinku $(-1, 1)$. Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2^3 + \dots + X_n^{2n-1}}{\sqrt{\ln n}}.$$

20 (Zadanie domowe na). Dane są niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ o tym samym rozkładzie o średniej 0 i skończonej wariancji $\sigma^2 > 0$. Niech $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu (i, jeśli jest zbieżny, to wyznaczyć jego granicę)

$$Y_n = \frac{S_1 + \dots + S_n}{n^{3/2}}.$$

21. Dane są niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ o rozkładach:

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad \mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2n^2}.$$

Wykazać, że

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1)$$

ale $\text{Var } X_n^2 \rightarrow 2$, więc

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{\text{Var}(X_1 + \dots + X_n)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

22 (Zadanie ćwiczebne ze starego kolokium). Zmienne $X_1, X_2, \dots$ są niezależne oraz $\mathbb{P}(X_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Określmy

$$Y_n := (-1)^n \frac{n-1}{n} (2 + 3X_n) \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

Czy ciąg $\frac{1}{\sqrt{n}}(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n)$ jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

23 (Zadanie ćwiczebne ze starego egzaminu). Zmienne $X_1, X_2, \dots$ są niezależne przy czym X_k ma rozkład jednostajny na przedziale $[-3\sqrt{k}, 3\sqrt{k}]$. Czy ciągi

$$Y_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \quad \text{oraz} \quad Z_n := \min\{2X_1, Y_n\}$$

są zbieżne według rozkładu? W przypadku istnienia granicy badanego ciągu proszę wyznaczyć jej dystrybuantę.

24 (Zadanie ćwiczebne ze starego kolokwium). Zmienne $X_1, X_2, \dots$ są niezależne przy czym X_k ma rozkład jednostajny na przedziale $[-5, 5]$. Czy ciąg

$$Y_n := \frac{X_1 + \sqrt{2}X_2 + \dots + \sqrt{n}X_n}{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2}$$

jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

25 (Zadanie ćwiczebne ze starego kolokwium). Rozważmy ciąg $X_1, X_2, \dots$ niezależnych zmiennych losowych, taki że zmienna X_k ma rozkład wykładniczy z parametrem $\frac{1}{k}$. Niech $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Czy ciąg zmiennych losowych

$$Y_n := \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\text{Var } S_n}}$$

jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

26 (Zadanie ćwiczebne ze starego egzaminu). Rozważmy ciąg $X_1, X_2, \dots$ niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie wykładniczym z parametrem 2. Niech

$$Y_n := \sqrt{X_1 + \dots + X_n} \sin\left(\frac{X_1 - X_2 + X_3 - X_4 + \dots + X_{2n-1} - X_{2n}}{n}\right).$$

Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ zbadać istnienie granicy $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Y_n \leq t)$. Jeśli granica istnieje, wyznaczyć ją, a w przeciwnym przypadku uzasadnić brak zbieżności.

27 (Zadanie ćwiczebne ze starego egzaminu). Zmienne $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots$ są niezależne, przy czym $\mathbb{P}(X_n = \pm 2) = \frac{1}{2}$, zaś Y_n ma rozkład wykładniczy ze średnią $n^{-1/2}$. Dla liczby rzeczywistej t obliczyć

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \sqrt{Y_i} \geq tn^{1/4}\right).$$