

Rachunek prawdopodobieństwa II

II seria zadań – funkcje charakterystyczne

1. Wyznaczyć funkcje charakterystyczne rozkładów dyskretnych:
 - (a) jednopunktowego;
 - (b) dwupunktowego;
 - (c) dwupunktowego symetrycznego;
 - (d) geometrycznego;
 - (e) Bernoulliego;
 - (f) Poissona.
2. Wyznaczyć funkcje charakterystyczne rozkładów ciągłych:
 - (a) wykładniczego;
 - (b) symetrycznego wykładniczego;
 - (c) jednostajnego;
 - (d) normalnego;
3. Wykazać, że kombinacje wypukłe funkcji charakterystycznych są funkcjami charakterystycznymi.
4. Rozstrzygnąć, które z następujących funkcji są funkcjami charakterystycznymi: $\cos t$, $2 \cos t$, $\frac{1+\cos t}{2}$, $\cos^2(t)$, $\frac{(1+e^{it})^2}{4}$, $\frac{1}{2-e^{it}}$.
5. Załóżmy, że $X_1, X_2, \dots$ są zmiennymi iid o funkcji charakterystycznej φ , zaś N – zmienną o rozkładzie Poissona z parametrem $\lambda > 0$, niezależną od ciągu $(X_n)_n$. Wyznaczyć (w terminach φ i λ) funkcję charakterystyczną zmiennej losowej $\sum_{j=1}^{N+1} X_j$.
- 6 (Zadanie ćwiczebne ze starego kolokwium). Obliczyć funkcję charakterystyczną zmiennej losowej $S = \sum_{k=1}^{N+1} X_k$, gdzie X_k są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym ze średnią 1 i wariancją 5, a N jest niezależny od $(X_k)_{k \geq 1}$ i ma rozkład dwumianowy z parametrami $n = 100$ i $p = 1/5$.
7. Załóżmy, że φ jest funkcją charakterystyczną. Czy musi wynikać stąd, że funkcją charakterystyczną jest: (a) φ^2 ; (b) $\operatorname{Re} \varphi$; (c) $|\varphi|^2$; (d) $|\varphi|$; (e) $\frac{1}{2-\varphi}$?
- 8 (Zadanie ćwiczebne ze starego kolokwium). Zmienna losowa X ma funkcję charakterystyczną φ_X .
 - (i) Wykazać, że istnieje zmienna losowa Y , której funkcja charakterystyczna ma postać
$$\varphi_Y = \frac{1}{5 - 4\varphi_X}.$$
 - (ii) Zmienna X ma wartości w przedziale $[0, 1]$. Czy z tego wynika, że zmienna losowa Y jest nieujemna? Czy wynika, że Y jest ograniczona?
- 9 (Zadanie ćwiczebne ze starego egzaminu). Zmienne $X_1, X_2, \dots$ są niezależne i mają rozkład jednostajny na odcinku $[0, 5]$. Niech
$$S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad \tau = \inf\{n \geq 1: X_n \geq 4\}.$$
Znaleźć funkcje charakterystyczne zmiennych τ i S_τ .
10. Wyznaczyć $\mathbb{E}X^k$ dla $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

11 (Zadanie ćwiczebne ze starego kolokwium). Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste a, b, c takie, że $\varphi(t) = e^{at^2+ibt} \cos^2(ct)$ jest funkcją charakterystyczną pewnej zmiennej losowej. Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej o takiej funkcji charakterystycznej.

12 (Zadanie ćwiczebne ze starego kolokwium). Wykazać, że istnieje zmienna losowa X , której funkcja charakterystyczna wynosi $\varphi_X(t) = e^{-2+2\cos(5t)}$. Wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej X .

13. Wykazać, że jeśli funkcja charakterystyczna zmiennej losowej X ma drugą pochodną w zerze, to $\mathbb{E}X^2 < \infty$.

14. Załóżmy, że $\alpha > 2$ i $c > 0$. Wykazać, że $e^{-c|t|^\alpha}$ nie jest funkcją charakterystyczną.

15. Dane jest $p \in (0, 2)$ i zmienna losowa X . Wykazać, że $\mathbb{E}|X|^p < \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\int_0^\infty \frac{1 - \operatorname{Re} \varphi_X(t)}{t^{p+1}} dt < \infty.$$

Jak wyglądać będzie analogiczne kryterium dla $p \in (2, 4)$?

[Zadanie z gwiazdką, za dodatkowy punkt] Sformułować warunek analogiczny do tego powyżej charakteryzujący skończoność p -tego momentu dla $p \in (2, 4)$, i wykazać, że jest on konieczny i dostateczny. Charakteryzacja może zawierać – poza skończonością jakiejś całki zależącej od funkcji charakterystycznej X – również warunek typu $\mathbb{E}X^2 < \infty$.

16. Wykazać, że zmienna losowa X jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy obraz jej funkcji charakterystycznej zawarty jest w prostej rzeczywistej.

17. Zmienne losowe X i Y są niezależne, przy czym X i $X + Y$ mają rozkłady normalne. Wykazać, że zmienna Y ma rozkład normalny lub skupiony w punkcie.

18 (Zadanie ćwiczebne ze starego egzaminu). Niech X, Y, Z będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym X ma rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$, a Y i Z mają rozkład wykładniczy z parametrem 1. Wykazać, że $X\sqrt{2Y}$ ma taki sam rozkład jak $Y - Z$.

19. Dane są $\alpha > 0$ i niezależne zmienne losowe X i Y o jednakowym rozkładzie. Załóżmy ponadto, że dla dowolnych $u, v \in \mathbb{R}$ zmienna $uX + vY$ ma taki sam rozkład jak zmienna $(|u|^\alpha + |v|^\alpha)^{1/\alpha} X$ (mówimy wtedy, że rozkład X jest α -stabilny). Wykazać, że $\varphi_X(t) = e^{-c|t|^\alpha}$ dla pewnego $c \geq 0$.

20. Wykazać, że jeśli $\varphi_X(t) = e^{-c|t|^\alpha}$ dla pewnego $c \geq 0$ i $\alpha > 0$, to rozkład X jest α -stabilny (definicja w poprzednim zadaniu).

21 (Zadanie ćwiczebne ze starego egzaminu). Znaleźć wszystkie zmienne losowe X takie, że jeśli Y jest zmienną $\mathcal{N}(0, 1)$ niezależną od X , to $X + Y$ ma ten sam rozkład, co $\frac{1}{2}X + 3Y + 1$.

22. Załóżmy, że zmienna losowa X_n ma rozkład geometryczny z parametrem $p_n \in (0, 1)$, zaś $(a_n)_n$ jest takim zbieżnym do zera ciągiem liczb dodatnich, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{a_n} = \lambda > 0$. Wykazać, że zmienne $a_n X_n$ zbiegają słabo do rozkładu wykładniczego z parametrem λ .

23. Dane są niezależne zmienne losowe $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ o rozkładzie symetrycznym skupionym w punktach -1 i 1 . Udowodnić, że szereg $\sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon_k}{2^k}$ jest słabo zbieżny do rozkładu jednostajnego na odcinku $[-1, 1]$.

24 (Zadanie ćwiczebne ze starego egzaminu). Czy funkcja $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1-e^{-t^2}}{t^2} & \text{dla } t \neq 0 \\ 1 & \text{dla } t = 0 \end{cases}$$

jest funkcją charakterystyczną?

25 (Zadanie ćwiczebne ze starego kolokwium). Ciąg funkcji charakterystycznych zmiennych losowych X_n spełnia warunek

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{X_n}(t) = \left(\frac{1}{3} e^{2it} + \frac{2}{3} e^{-it} \right) e^{-3t^2}$$

dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Obliczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \geq 0)$.

26 (Zadanie ćwiczebne ze starego kolokwium). Ciąg funkcji charakterystycznych zmiennych losowych X_n spełnia warunek

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2t \varphi_{X_n}(t) = \sin(2t)$$

dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Obliczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \leq t)$.

27 (Zadanie ćwiczebne ze starego kolokwium). Niech $\varphi(t) = \frac{1}{3} e^{-12t^2} + \frac{2}{3} \cos(2t)$.

- (a) Wykazać, że φ jest funkcją charakterystyczną pewnej zmiennej losowej.
- (b) Niech $(Z_n)_{n \geq 1}$ będzie takim ciągiem zmiennych losowych, że dla każdego $t > 0$ zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{Z_n}(t) = \varphi(t),$$

gdzie φ_{Z_n} oznacza funkcję charakterystyczną zmiennej losowej Z_n . Czy ciąg $(\mathbb{E} e^{-Z_n^2})_{n \geq 1}$ jest zbieżny? Jeśli tak, wyznaczyć granicę, a w przeciwnym przypadku – uzasadnić brak zbieżności.

28 (Zadanie ćwiczebne ze starego kolokwium). Zmienne losowe $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, X_1, X_2, \dots$ są niezależne, przy czym X_i mają rozkład jednostajny na przedziale $[1, 7]$, a ε_i mają następujący rozkład dwupunktowy: $\mathbb{P}(\varepsilon_i = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(\varepsilon_i = -1)$. Niech $Y_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \varepsilon_k X_k$. Czy ciąg $(Y_n)_n$ jest ciasny?

29. Załóżmy, że zmienna losowa X spełnia $\mathbb{P}(X \in \mathbb{Z}) = 1$. Wykazać, że dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ zachodzi

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} \varphi_X(t) dt.$$

30. Udowodnić, że funkcją charakterystyczną rozkładu Cauchy'ego z parametrem $a > 0$ jest $e^{-a|t|}$. Wywnioskować stąd, że rozkład Cauchy'ego jest 1-stabilny.

31. Udowodnić, że funkcja "trójkąt", tj. $\varphi(t) = 0 \vee (1 - |ct|)$, jest funkcją charakterystyczną.

32 (Kryterium Pólyi). Załóżmy, że $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest parzysta, ciągła w zerze, wypukła i nierosnąca na przedziale $[0, \infty)$ oraz ma w zerze wartość 1. Wykazać, że φ jest funkcją charakterystyczną.

33. Załóżmy, że $\alpha \in (0, 1]$ i $c > 0$. Wykazać, że $e^{-c|t|^\alpha}$ jest funkcją charakterystyczną.