

Rachunek prawdopodobieństwa II

I seria zadań – słaba zbieżność

1. Niech $x, x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Wykazać że $\delta_{x_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \delta_x$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_n \rightarrow x$.
2. Załóżmy, że zmienne losowe X_n, X przyjmują wartości całkowite p.n. Wykazać, że $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k).$$

Jak zmieni się teza, jeśli zbiorem wartości zmiennych losowych jest $\mathbb{Q}$ zamiast $\mathbb{Z}$?

3. Niech $\text{Bin}(n, p)$ oznacza rozkład Bernoulliego o n próbach i z prawdopodobieństwem sukcesu p , zaś $\text{Poiss}(\lambda)$ – rozkład Poissona z parametrem λ . Udowodnić, że jeśli $np_n \rightarrow \lambda$, to $\text{Bin}(n, p_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} \text{Poiss}(\lambda)$.

4. Rozkłady zmiennych losowych X_n , $n \in \mathbb{N}$ zadane są następująco:

$$\mathbb{P}\left(X_n = \frac{j}{n}\right) = \frac{2j}{n(n+1)} \quad \text{dla } j = 1, \dots, n.$$

Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu $(X_n)_n$ i wyznaczyć jego granicę, jeśli ta istnieje.

5. Dane są niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ o rozkładzie jednostajnym na odcinku $(0, a)$. Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu $n \min\{X_1, \dots, X_n\}$ i wyznaczyć jego granicę, o ile ta istnieje.

6. **[Zadanie domowe na 14 X]** Dane są niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ o rozkładzie Cauchy'ego z parametrem $a > 0$, to znaczy z gęstością

$$g(x) = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)}.$$

Wykazać, że $\frac{1}{n} \max\{X_1, \dots, X_n\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \frac{1}{Y}$, gdzie Y ma rozkład wykładniczy. Wyznaczyć parametr tego rozkładu.

- 7 (Lekko zmodyfikowane zadanie ćwiczebne ze starego kolokwium). Dane są $\alpha > 0$ i niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ o gęstości $g(x) = \frac{3}{8}x^2 \mathbb{1}_{[0,2]}(x)$. Zbadać (w zależności od parametru α) zbieżność według rozkładu ciągu

$$Y_n = n^\alpha \min\{X_1, \dots, X_n\}$$

i wyznaczyć jego granicę dla tych parametrów α , dla których ona istnieje.

- 8 (Zadanie ćwiczebne ze starego egzaminu). Niech $(X_n)_n$ i $(Y_n)_n$ będą zmiennymi iid o gęstości $g(x) = (x+1)^{-2} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$. Dla $n = 1, 2, \dots$ zdefiniujmy

$$Y_n = \frac{1}{n} \max_{0 \leq i \leq n} (X_i - 1).$$

Czy ciąg $(Y_n)_n$ zbiega według rozkładu? Jeśli tak, to wyznaczyć jego granicę, a w przeciwnym przypadku – uzasadnić brak zbieżności.

9 (Zadanie ćwiczebne ze starego kolokwium). Ciągi zmiennych losowych $(X_n)_n$ i $(Y_n)_n$ zbiegają według rozkładu do rozkładu wykładniczego z parametrem 2. Wiedząc, że dla każdego n zmienne losowe X_n i Y_n są niezależne, udowodnić, że zmienne losowe $Z_n = \min\{X_n, Y_n\}$ zbiegają według rozkładu do zmiennej wykładniczej z parametrem 4.

10 (Zadanie ćwiczebne ze starego kolokwium). Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zmienne losowe X_n i Y_n są niezależne. Załóżmy, że zmienne losowe $\min\{X_n, Y_n\}$ zbiegają według rozkładu do zmiennej jedostajnej na odcinku $[1, 4]$. Czy wynika stąd, że zmienne losowe $\max\{X_n, Y_n\}$ zbiegają według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

11. Załóżmy, że $c \in \mathbb{R}$. Udowodnić, że jeśli $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} c$, to $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$.

12. Podać przykład zbieżnego punktowo ciągu dystrybuant, którego granica nie jest dystrybuantą.

13. Podać przykład takiego ciągu zmiennych losowych zbieżnego według rozkładu, że odpowiadający mu ciąg dystrybuant nie jest zbieżny punktowo do dystrybuanty rozkładu granicznego.

14. Uzasadnić, że jeśli $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ i X ma rozkład ciągły, to dystrybuanty zmiennych losowych X_n zbiegają jednostajnie do dystrybuanty zmiennej losowej X .

15. (a) Wykazać, że jeśli $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ i $|X_n - Y_n| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, to $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$.

(b) Wykazać, że jeśli $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ i $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$, to $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$.

(c) Wykazać, że jeśli $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ i $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} c$, to $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X + c$.

(d) Wykazać, że jeśli $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ i $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$, to $X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$.

(e) Wykazać, że jeśli $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ i $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} c$, to $X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} cX$.

16 (Zadanie ćwiczebne ze starego kolokwium). Zmienne losowe X_n i Y_n określone są na wspólnej przestrzeni probabilistycznej. Zmienna X_n ma gęstość $\frac{5}{2}n^5 x^4 \mathbb{1}_{\{|x| \leq 1/n\}}$, a zmienne Y_n zadane są następująco:

$$\mathbb{P}\left(Y_n = \frac{k}{n}\right) = \left(1 - e^{-\frac{5}{n}}\right)e^{\frac{-5k}{n}} \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots$$

Czy wynika stąd, że ciąg $X_n + Y_n$ jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

17 (Zadanie ćwiczebne ze starego kolokwium). Niech X_n będzie n -wymiarowym wektorem losowym o rozkładzie jednostajnym na kuli euklidesowej w $\mathbb{R}^n$ o środku w 0 i promieniu 1. Niech R_n będzie odległością X_n od 0.

(a) Wykazać, że R_n zbiega do 1 według prawdopodobieństwa.

(b) Czy ciąg $Y_n = n(1 - R_n)$ jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to wyznaczyć jego granicę, a w przeciwnym wypadku – uzasadnić brak zbieżności.

18. Dane są zmienne losowe X, X_n o gęstościach odpowiednio $g, g_n, n \in \mathbb{N}$. Wykazać, że jeśli $g_n \xrightarrow{\text{p.w.}} g$, to $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$. Czy zachodzi implikacja w drugą stronę?

19. (a) Wykazać, że jeśli ciągi liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ i liczb dodatnich $(\sigma_n)_n$ są zbieżne, to ciąg rozkładów $(\mathcal{N}(a_n, \sigma_n^2))_n$ jest zbieżny.

(b) Wykazać, że jeśli ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ jest nieograniczony lub ciąg liczb dodatnich $(\sigma_n)_n$ jest nieograniczony, to ciąg rozkładów $(\mathcal{N}(a_n, \sigma_n^2))_n$ nie jest ciasny.

- (c) Wykazać, że ciąg rozkładów $(\mathcal{N}(a_n, \sigma_n^2))_n$ jest ciasny wtedy i tylko wtedy, gdy ciągi liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ i liczb dodatnich $(\sigma_n)_n$ są ograniczone.
- (d) Wykazać, że ciąg rozkładów $(\mathcal{N}(a_n, \sigma_n^2))_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciągi liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ i liczb dodatnich $(\sigma_n)_n$ są zbieżne.

20 (Zadanie ćwiczebne ze starego kolokwium). Wykazać, że ciąg zmiennych losowych $(X_n)_n$ jest ciasny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu liczbowego $(a_n)_n$ zbieżnego do zera ciąg $(a_n X_n)_n$ zbiega do zera według prawdopodobieństwa.

21 (Zadanie ćwiczebne ze starego kolokwium). Znaleźć wszystkie zmienne losowe X takie, że ciąg $((2X)^n)_{n \geq 1}$ jest ciasny.

22 (Zadanie ćwiczebne ze starego kolokwium). Niech μ będzie rozkładem prawdopodobieństwa na $\mathbb{R}$.

- (a) Niech $Z_n = (X_n, Y_n)$ dla $n \in \mathbb{N}$ będą dwuwymiarowymi wektorami losowymi takimi, że X_n oraz Y_n mają rozkład μ . Wykazać, że z ciągu $(Z_n)_n$ można wybrać podciąg zbieżny według rozkładu.
- (b) Załóżmy, że miara probabilistyczna μ ma tę własność, że każdy ciąg $(Z_n)_n$ dwuwymiarowych wektorów losowych $Z_n = (X_n, Y_n)$ taki, że jego współrzędne mają (dla każdego n) rozkład μ , jest zbieżny według rozkładu. Wykazać, że $\mu = \delta_a$ dla pewnej liczby $a \in \mathbb{R}$.

23. Jaki warunek musi spełniać zbiór A aby ciasna była rodzina rozkładów

- (a) wykładniczych $\{\text{Exp}(\lambda) : \lambda \in A\}$, przy czym zakładamy, że $A \subset (0, \infty)$;
- (b) jednostajnych $\{\text{Unif}(a, b) : a, b \in A, a < b\}$, przy czym zakładamy, że $A \subset \mathbb{R}$?

Definicja 1. Powiemy, że rodzina zmiennych losowych $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ jest *jednostajnie całkowalna*, jeśli

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{E}|X_i| \mathbb{1}_{\{|X_i| > M\}} = 0.$$

Innymi słowy, dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $M > 0$, że dla każdego $i \in \mathcal{I}$ zachodzi $\mathbb{E}|X_i| \mathbb{1}_{|X_i| > M} \leq \varepsilon$.

24. Wykazać, że jednostajnie całkowalna rodzina zmiennych losowych jest ciasna oraz wszystkie zmienne losowe z tej rodziny są całkowalne.

25. Załóżmy, że ciąg zmiennych losowych $(X_n)_n$ zbiega według rozkładu do X . Udowodnić, że

- (a) $\mathbb{E}|X| \leq \liminf_n \mathbb{E}|X_n|$;
- (b) jeśli ciąg $(X_n)_n$ jest dodatkowo jednostajnie całkowalny (definicja powyżej), to X jest całkowalna i $\mathbb{E}X_n \rightarrow \mathbb{E}X$;
- (c) jeśli zmienne losowe $X, X_1, X_2, \dots$ są dodatkowo całkowalne i nieujemne oraz spełniają $\mathbb{E}X_n \rightarrow \mathbb{E}X$, to ciąg $(X_n)_n$ jest jednostajnie całkowalny.

26. Udowodnić, że jeśli $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ oraz $\sup_n \mathbb{E}|X_n|^p < \infty$ dla pewnego $p > 0$, to $\mathbb{E}|X|^q < \infty$ dla każdego $q \in (0, p]$ oraz $\mathbb{E}|X_n|^q \rightarrow \mathbb{E}|X|^q$ dla każdego $q \in (0, p)$, ale nie musi zachodzić $\mathbb{E}|X_n|^p \rightarrow \mathbb{E}|X|^p$.

27 (Zadanie ćwiczebne ze starego kolokwium). Ciąg dodatnich zmiennych losowych $(X_n)_n$ zbiega według rozkładu do X , a ciąg zmiennych $(-\frac{1}{2} \ln X_n)_n$ zbiega według rozkładu do Y . Wykazać, że X ma rozkład jednostajny na $[0, 1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy Y ma rozkład wykładniczy z parametrem 2.