

FAN*

IX seria zadań domowych,
termin: 9 grudnia, godzina 10.15

1. Obliczyć

$$\int_{C(0,2)} \frac{z^3 e^{1/z}}{1+z} dz.$$

2 (P). Dane są $n \in \mathbb{N}$, $r > 0$ oraz $a, b \in D(0, r)$. Niech Log oznacza główną gałąź logarytmu na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Obliczyć

$$\int_{C(0,r)} z^n \text{Log}\left(\frac{z-a}{z-b}\right) dz.$$

3. Załóżmy, że funkcja $f: \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ jest meromorficzna i ma jedynie skończenie wiele biegunów $a_1, \dots, a_m$, przy czym $a_1, \dots, a_m \notin \mathbb{Z}$. Wykazać, że jeśli $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$, to

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N (-1)^n f(n) = - \sum_{k=1}^m \text{res}\left(a_k, \frac{\pi f(z)}{\sin(\pi z)}\right).$$

4. Dane jest $a \notin i\mathbb{Z}$. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2}.$$

5 (P). Obliczyć

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2) \cosh(\frac{\pi x}{2})} dx.$$

6 (P). Wykazać, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$