

FAN*

VIII seria zadań domowych,
termin: 2 grudnia, godzina 10.15

1. Dany jest wielomian P stopnia n spełniający $|P| \leq M$ na $\mathbb{D}$. Wykazać, że $|P(z)| \leq M|z|^n$ dla każdego z spełniającego $|z| \geq 1$.
2. Załóżmy, że $M, p > 0$ oraz że f jest funkcją całkowitą spełniającą $|f(z)| \leq M|z|^p$ dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$. Wykazać, że f jest wielomianem.
- 3 (P). Znaleźć szereg Taylora wokół 0 funkcji $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$ oraz wyznaczyć jego promień zbieżności. Rozstrzygnąć, czy f jest równa swojemu szeregowi Taylora w (otwartym) kole zbieżności.
- 4 (P). Wyznaczyć szereg Laurenta wokół punktu $z_0 = i$ funkcji $\frac{\log z}{z-i}$, gdzie $\log$ jest gałęzią logarytmu w otoczeniu punktu i , taką że $\log(i) = -\frac{2023\pi i}{2}$. Wyznaczyć pierścień zbieżności otrzymanego szeregu.
- 5 (Każdy podpunkt wart jest 1 punkt).
 - (a) Rozstrzygnąć, czy istnieje taka funkcja całkowita f , że ciąg o wyrazie $\frac{f(x_n)}{1+|x_n|}$ dąży do 1 zarówno dla każdego ciągu liczb rzeczywistych (x_n) zbieżnego do nieskończoności, jak i dla każdego ciągu liczb rzeczywistych (x_n) zbieżnego do minus nieskończoności.
 - (b) Co jeśli $\frac{f(x_n)}{1+|x_n|}$ zastąpimy przez $\frac{f(x_n)}{1+\sqrt{|x_n|}}$ i zapytamy o zbieżność do 1 dla każdego ciągu liczb rzeczywistych (x_n) zbieżnego do plus nieskończoności?
 - (c) Co jeśli w (b) $\frac{f(x_n)}{1+|x_n|}$ zastąpimy przez $|x_n|f(x_n)$?

6 (Pisemne zadanie domowe za dodatkowe 2 punkty. Termin oddania: 13 stycznia, 10.15.). Dany jest szereg potęgowy $1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ zadający funkcję f , która jest ciągła na $\overline{\mathbb{D}}$ i holomorficzna w $\mathbb{D}$. Załóżmy, że

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2 dt < \left(1 + \frac{1}{4}|a_1|^2\right)^2.$$

Wykazać, że f ma pierwiastek w $\mathbb{D}$.