

FAN*

VII seria zadań domowych,
termin: 25 listopada, godzina 10.15

1. Wyznaczyć wszystkie holomorficzne bijekcje $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ takie że $f^{-1}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ jest holomorficzna¹ oraz $f(0) = 0$.

2. Wyznaczyć wszystkie holomorficzne bijekcje $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ takie że $f^{-1}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ jest holomorficzna.

3. Niech $\alpha \in \mathbb{C}$. Wykazać, że $(1+z)^\alpha := e^{\alpha \operatorname{Log}(1+z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$ na $\mathbb{D}$, gdzie $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ oraz Log jest gałęzią główną logarytmu na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

4 (Zadanie treningowe – **nie na punkty**; nie będziemy omawiać go na ćwiczeniach). Wyznaczyć wszystkie (izolowane) osobliwości (na $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$) funkcji f i określić rodzaj/typ każdej z nich² dla:

a) $f(z) = z^3 \sin \frac{1}{z} \left(\cos \frac{1}{z} - 1 \right)$; b) $f(z) = \frac{z(1-z)(e^z + e^{-z})}{e^z - e^{-z}}$.

5 (Każdy podpunkt wart jest jeden punkt).

- (a) Czy istnieje funkcja holomorficzna $f: \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\} \rightarrow \mathbb{C}$, która w każdym z punktów $z = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ ma biegun?
- (b) Czy istnieje funkcja holomorficzna $f: \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\} \rightarrow \mathbb{C}$, która w każdym z punktów $z = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ ma osobliwość istotną?
- (c) Czy istnieje funkcja holomorficzna $f: \mathbb{C} \setminus \{1, 2, 3, \dots\} \rightarrow \mathbb{C}$, która dla każdego $n \in \mathbb{N}$ ma biegun rzędu n w punkcie $z = n$?

6 (P). Dana jest funkcja $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorficzna w $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ i ograniczona na $\{|z| > 1\}$. Wykazać, że $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{zf(w)}{w(z-w)} dw$ dla każdego z spełniającego $|z| > 1$. Obliczyć $\frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{zf(w)}{w(z-w)} dw$, gdy z spełnia $|z| < 1$.

7 (P). Wykazać, że jeśli funkcje całkowite f oraz g spełniają $|f| \leq |g|$ na $\mathbb{C}$, to $f = cg$ na $\mathbb{C}$ dla pewnej stałej $c \in \overline{\mathbb{D}}$.

8 (P). Niech U będzie obszarem w $\mathbb{C}$. Załóżmy, że $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ jest taka, że f^2 i f^3 są holomorficzne w U . Wykazać, że f jest holomorficzna w U .

¹Jak się przekonamy później, holomorficzność f^{-1} wynika automatycznie z założenia, że f jest holomorficzną bijekcją.

²Jeśli osobliwość jest biegunem, należy wyznaczyć jego rząd.