

FAN*

VI seria zadań domowych,
termin: 18 listopada, godzina 10.15

Zadania znane z poprzedniej serii:

1 (P – każdy podpunkt wart jest jeden punkt). Obliczyć

$$\begin{aligned} \text{(a)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx, \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}, \quad \text{(b)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx, \\ \text{(c)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a \cos t + a^2} dt \quad \text{dla wszystkich } a \text{ spełniających } |a| \neq 1. \end{aligned}$$

2 (P). Czy istnieje gałąź pierwiastka kwadratowego funkcji $f(z) = z^2 + z - 1$ na obszarze $U = \{|z| > 10\}$? Innymi słowy: czy istnieje ciągłe $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ spełniające $(g(z))^2 = f(z)$ dla $z \in U$?

3. Wyznaczyć wszystkie funkcje całkowite f spełniające $|f(z) - f'(z)| = 1$ dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$.

Nowe zadania:

4. Załóżmy, że f jest funkcją całkowitą, której obraz $f(\mathbb{C})$ nie jest gęsty w $\mathbb{C}$. Wykazać, że f jest stałą.

5. Niech U będzie obszarem zawierającym domknięty dysk jednostkowy $\{|z| \leq 1\}$. Załóżmy, że $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ jest holomorficzną, zaś P jest wielomianem monicznym¹. Wykazać, że

$$|f(0)| \leq \max_{|z|=1} |f(z)P(z)|.$$

6 (P). Załóżmy, że funkcje $f, g: U \rightarrow \mathbb{C}$ są holomorficzne w obszarze U . Wykazać, że jeśli $|f| + |g|$ osiąga lokalne maksimum w U , to f i g są funkcjami stałymi.

7 (P – zadanie za dwa **dodatkowe** punkty, termin oddania: 2 XII). Dana jest funkcja holomorficzna $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, gdzie $A = \{z \in \mathbb{C}: R_1 < |z| < R_2\}$. Niech $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ dla $r \in (R_1, R_2)$. Wykazać, że funkcja $r \mapsto \ln(M(e^r))$ jest wypukłą na $(\ln R_1, \ln R_2)$.

Wskazówka: nie znam rozwiązania, które wykorzystuje zadanie 3 z ćwiczeń 14 XI.

¹To znaczy takim, że współczynnik przy najwyższej potędze wynosi 1.