

FAN*

V seria zadań domowych,
termin: 14 listopada, godzina 10.15

1. Niech $I_R = \int_{|z|=R} \frac{z^2+9}{z^4+3z^2+2} dz$ dla $R > 2$. Wykazać, że $I_R = 0$ dla każdego $R > 2$.

2. Dany jest wielomian P stopnia co najwyżej n . Wykazać, że dla każdego $a \in D(0, R)$ zachodzi

$$\int_{S(0,R)} \frac{P(z)}{z^{n+1}(z-a)} dz = 0.$$

3. Liczba zespolona z spełnia $|z| \neq 1$. Obliczyć

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(e^{2\pi i k/n})}{1 - ze^{-2\pi i k/n}}$$

lub wykazać, że ta granica nie istnieje.

4 (P – zadanie warte 3 punkty, czyli tyle, co półtora zwykłego zadania pisemnego). Niech $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Obliczyć $\int_0^\infty f(x) dx$ oraz $\int_0^\infty (f(x))^3 dx$. Wykazać, że $\int_0^\infty (f(x))^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{1-\cos x}{x^2} dx$.

5 (P). Dane jest $a \in (-1, 1)$. Obliczyć wartość całki

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^2} dx.$$

Wskazówka: rozpatrzyć funkcję $f(z) = \frac{z^a}{1-z^2}$, gdzie $z^a = e^{a \operatorname{Log} z}$, zaś Log jest gałęzią główną logarytmu na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

6 (P). Dane jest $a > 0$. Obliczyć wartość całki

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx.$$

Część VI serii zadań domowych,
termin: 18 listopada, godzina 10.15

Rozwiązania trzech zadań znajdujących się na odwrocie należy oddawać **do 18 listopada, do 10.15**. Poza tym 14 listopada otrzymają Państwo **kolejne trzy** zadania domowe na 18 listopada: jedno ustne na szybki pomysł, jedno ustne na raczej szybki pomysł i szybkie pokombinowanie oraz jedno pisemne na większy pomysł/kilka mniejszych pomysłów/większe pokombinowanie. Z poniższych zadań pierwsze i trzecie są łatwe i standardowe, a drugie może mieć dużą średnią wariancję czasu wymaganego do wymyślenia jego rozwiązania, więc warto podumać o nim wielokrotnie, a dumanie można zacząć już teraz.

Zadanie 1 (P – każdy z trzech podpunktów wart jest jeden punkt, czyli tyle, co pół zwykłego zadania pisemnego). Obliczyć

$$\begin{aligned} \text{(a)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx, \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}, \quad \text{(b)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx, \\ \text{(c)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a \cos t + a^2} dt \quad \text{dla wszystkich } a \text{ spełniających } |a| \neq 1. \end{aligned}$$

Zadanie 2 (P). Czy istnieje gałąź pierwiastka kwadratowego funkcji

$$f(z) = z^2 + z - 1$$

na obszarze $U = \{|z| > 10\}$? Innymi słowy: czy istnieje ciągłe $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ spełniające $(g(z))^2 = f(z)$ dla $z \in U$?

Zadanie 3. Wyznaczyć wszystkie funkcje całkowite f spełniające

$$|f(z) - f'(z)| = 1$$

dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$.