

FAN*

IV seria zadań domowych,
termin: 4 listopada, godzina 10.15

1. (P) Załóżmy, że $u : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ jest harmoniczna. Wykazać, że u jest stała.
2. Niech $I_R = \int_{|z|=R} \frac{z^2+9}{z^4+3z^2+2} dz$ dla $R > 2$. Wykazać, że $I_R = 0$ dla każdego $R > 2$.
- 3 (P). Niech $\gamma(t) = t - i \sin t$ dla $t \in [-\pi, \pi]$.
 - (a) Dla każdej z funkcji $\frac{1}{z+1}$ i $\frac{1}{z-1}$ wskazać obszar (obszary dla poszczególnych funkcji mogą się od siebie różnić) zawierający obraz krzywej γ i funkcję pierwotną danej funkcji na tym obszarze. Należy podać te funkcje pierwotne w sposób jawny, bez użycia całek.
 - (b) Obliczyć $\int_{\gamma} f$, gdzie $f(z) = \frac{2z}{z^2-1}$.
 - (c) Czy to prawda, że $\int_{\gamma} f = \int_{\eta} f$ dla każdej krzywej gładkiej η łączącej $-\pi$ z π omijającej punkty -1 oraz 1 ?

4. Wykazać, że dla $A > 0$ zachodzi

$$\int_0^{\pi/2} e^{-A \sin t} dt = O\left(\frac{1}{A}\right).$$

Zadanie fakultatywne – nie na punkty:

5. Niech $\gamma : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{C}$ będzie zadana wzorem $\gamma(t) = 2e^{it}$. Policzyc

$$\int_{\gamma} \frac{z}{z^2+1} dz,$$

wskazując obszar U zawierający $\gamma^* = \gamma([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ i funkcję pierwotną F (wyrażoną jawnie, bez użycia całek) funkcji podcałkowej $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$ na U , a następnie korzystając z zależności

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(\pi/2)) - F(\gamma(-\pi/2)).$$