

FAN*

II seria zadań domowych,
termin: 21 października, godzina 10.15

1 (P). Załóżmy, że $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ma pochodną zespoloną w punkcie $z = 0$ oraz spełnia $f(0) = f'(0) = 1$ i $f(z_1 + z_2) = f(z_1)f(z_2)$ dla wszystkich $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Wykazać, że $f(z) = \exp(z)$.

2. Wyznaczyć homografię przekształcającą obszar między okręgami $\{z : |z| = 2\}$ i $\{z : |z - 1| = 1\}$ na pas $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < 1\}$.

3. Znaleźć $r \in (0, 1)$ oraz homografię przekształcającą obszar $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 1/2, |z + 2| > 2\}$ na pierścień $\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < 1\}$.

4 (P). Funkcja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dana jest wzorem

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^5}{|z|^4} & \text{if } z \neq 0, \\ 0 & \text{if } z = 0. \end{cases}$$

Wykazać, że:

- (a) f ma pochodne cząstkowe w 0,
- (b) pochodne cząstkowe f w 0 spełniają równania Cauchy'ego-Riemanna,
- (c) f nie ma pochodnej zespolonej w 0.

5. Wykazać, że $\frac{\partial}{\partial z}(z^k \bar{z}^l) = k z^{k-1} \bar{z}^l$ oraz $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(z^k \bar{z}^l) = l z^k \bar{z}^{l-1}$.

6. Załóżmy, że $f : U \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jest holomorficzna na obszarze U oraz¹ że $\operatorname{Re} f$ i $\operatorname{Im} f$ są klasy $C^2(U)$. Wykazać, że funkcja $z \mapsto \ln |f(z)|$ jest harmoniczna.

Definicja 1. Powiemy, że funkcja w jest harmonicznym sprzężeniem funkcji harmonicznnej $u : U \rightarrow \mathbb{R}$, jeśli $u + iw$ jest funkcją holomorficzną na U .

Co więcej, z równań Cauchy'ego-Riemanna wynika, że $w \in C^2(U)$ jest sprzężeniem harmonicznym funkcji harmonicznnej² $u \in C^2(U)$ wtedy i tylko wtedy, gdy w jest harmoniczna, $u_x = w_y$ oraz $u_y = -w_x$.

7 (P). (Długość rozwiązania nie będą oceniane ani punktowane.) Dana jest funkcja harmoniczna $u : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ klasy³ C^3 i jednorodna stopnia $\alpha > 0$. Wykazać, że funkcja $w = \frac{1}{\alpha}(yu_x - xu_y)$ jest harmonicznym sprzężeniem funkcji u . Wykorzystać ten fakt do znalezienia sprzężenia harmonicznego funkcji $x^2 + 2xy - y^2$.

¹Jak przekonamy się później, można pominąć założenie, że $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in C^2(U)$, gdyż wynika ono z holomorficzności f na U .

²Założenie o klasie C^2 można pominąć, bo wynika ono z harmoniczności.

³Założenie o klasie C^3 można pominąć, bo wynika ono z harmoniczności.