

FAN*

I seria zadań domowych,
termin: 14 października, godzina 10.15

1 (P). Dane są $n \geq 1$ i wielomian $P_n(z) = 1 + \frac{z}{4} + \dots + \frac{z^n}{4^n}$. Wykazać, że dla liczb zespolonych $a \neq b$ spełniających $|a|, |b| < 1$ zachodzi $|P_n(a) - P_n(b)| > \frac{1}{18}|a - b|$.

2. Wyznaczyć iloczyn wszystkich rozwiązań (licząc z krotnościami) równania

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{z - \varepsilon_k} = 0,$$

gdzie ε_k to różne od 1 pierwiastki stopnia n z jedynki (tzn. rozwiązania równania $z^n = 1$ oprócz $z = 1$).

3. Niech $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ będą pierwiastkami stopnia n z jedynki (patrz poprzednie zadanie). Wyznaczyć $\prod_{k \neq l} (\varepsilon_k - \varepsilon_l)$.

4. Dany jest wielomian $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ o współczynnikach dodatnich. Wykazać, że wszystkie pierwiastki P są zawarte w pierścieniu $\{z \in \mathbb{C} : r \leq |z| \leq R\}$, gdzie

$$r = \min \left\{ \frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, \dots, \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}, \frac{a_{n-1}}{a_n} \right\}, \quad R = \max \left\{ \frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, \dots, \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}, \frac{a_{n-1}}{a_n} \right\}.$$

5. Dla wielomianu $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ definiujemy wielomian $Q(z) = \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1} z + \dots + \bar{a}_0 z^n$. Załóżmy, że wszystkie pierwiastki P leżą we wnętrzu dysku jednostkowego, czyli w zbiorze $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Wykazać, że jeśli $|\gamma| = 1$, to wszystkie pierwiastki wielomianu $P(z) + \gamma Q(z)$ leżą na okręgu jednostkowym $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Przypomnijmy, że $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

6 (P). Niech $r > 0$ i $a \in \{z \in \mathbb{C} : |z| \neq r\}$. Wykazać, że $z \mapsto 1/z$ przekształca:

- (a) okrąg $S(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}$ na okrąg $S(\frac{\bar{a}}{|a|^2 - r^2}, \frac{r}{||a|^2 - r^2|})$,
- (b) dysk $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\}$ na zbiór $\hat{\mathbb{C}} \setminus \text{int } D(\frac{\bar{a}}{|a|^2 - r^2}, \frac{r}{||a|^2 - r^2|})$ jeżeli $|a| < r$,
- (c) dysk $D(a, r)$ na dysk $D(\frac{\bar{a}}{|a|^2 - r^2}, \frac{r}{||a|^2 - r^2|})$ jeżeli $|a| > r$.

7 (P). Niech $r > 0$ i $|a| = r$. Wykazać, że $z \mapsto 1/z$ przekształca:

- (a) okrąg $S(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}$ na prostą L przechodzącą przez punkt $\frac{1}{2a}$ i prostopadłą do wektora $\bar{a}$, wraz z punktem w nieskończoności,
- (b) dysk $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ na jedną z dwóch półpłaszczyzn o brzegu L .